Heinrich-von-Gagern-Gymnasium
Mathematik Leistungskurs Q_1
Herr Spiegel

03.12.2014

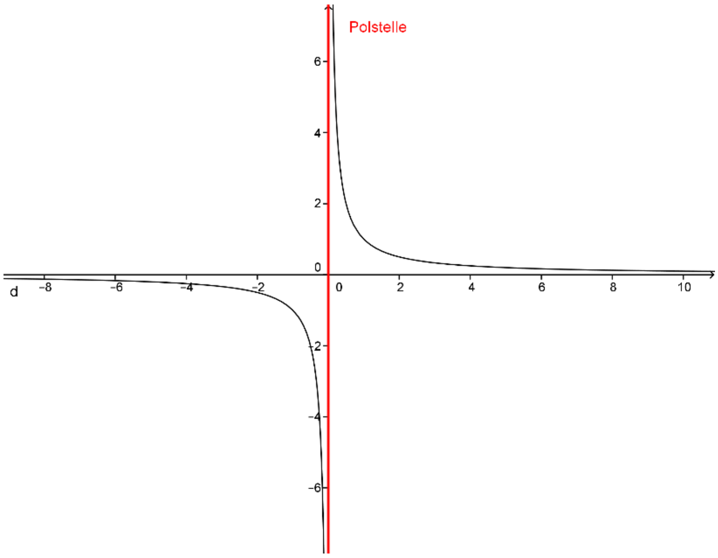
Asymptoten und Polstellen

Asymptote: Asymptoten sind Funktionen, an die sich die Ursprungsfunktion *im Unendlichen annähert*.

Polstelle: Polstellen sind *Definitionslücken*, wobei eine Definitionslücke nicht zwingend eine Polstelle sein muss. Hierbei muss man zwischen Polstellen *ohne Vorzeichenwechsel* und Polstellen *mit Vorzeichenwechsel* unterscheiden.

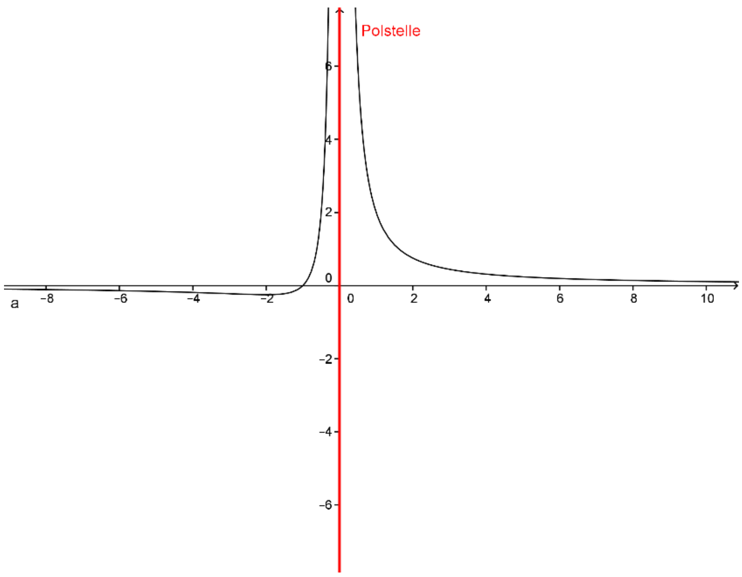
- Polstelle mit Vorzeichenwechsel:

  Die Funktionswerte besitzen rechts und links von der Polstelle ein anderes Vorzeichen.



- Polstelle ohne Vorzeichenwechsel:

  Die Funktionswerte besitzen rechts und links von der Polstelle das gleiche Vorzeichen.



Polstellen sind ebenfalls Asymptoten, wobei f(x) bei einer Polstelle gegen unendlich strebt. Eine Funktion kann auch mehrere *Asymptoten* (und *Polstellen*) besitzen.

Asymptoten

$f(x) = \frac{Zählerpolynom}{Nennerpolynom}$ ist eine rationale Funktion.

1.) Zählergrad < Nennergrad

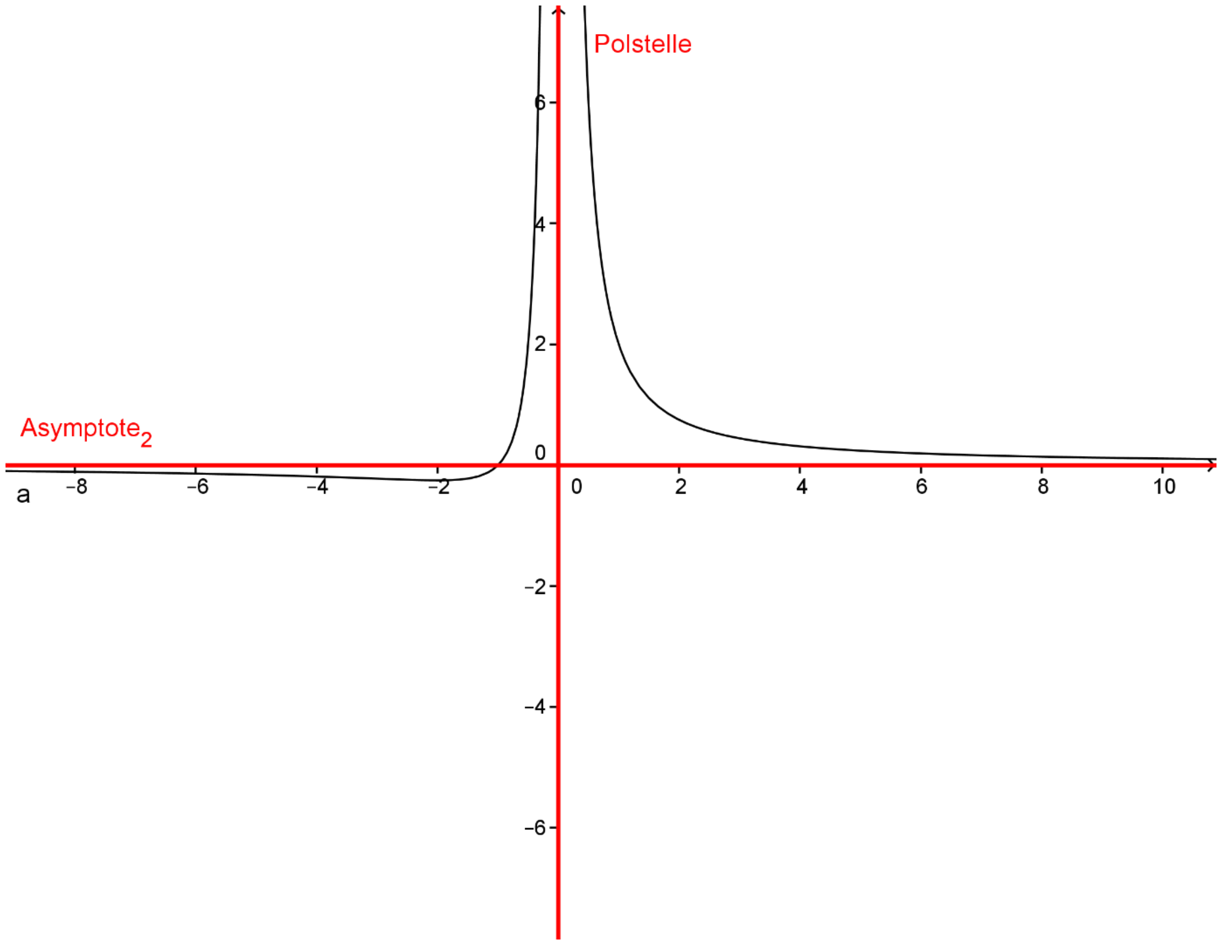
Der Nenner strebt schneller gegen unendlich als der Zähler, sodass sich für den Grenzwert null ergibt:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

Die x-Achse ist somit die Asymptote von dem Graphen von f.

Beispiel: $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$ → $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} + 0 = 0$

→ $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x+1}{x^2} = \pm\infty$



$f(x) = \frac{Zählerpolynom}{Nennerpolynom}$ ist eine rationale Funktion.

2.) Zählergrad = Nennergrad

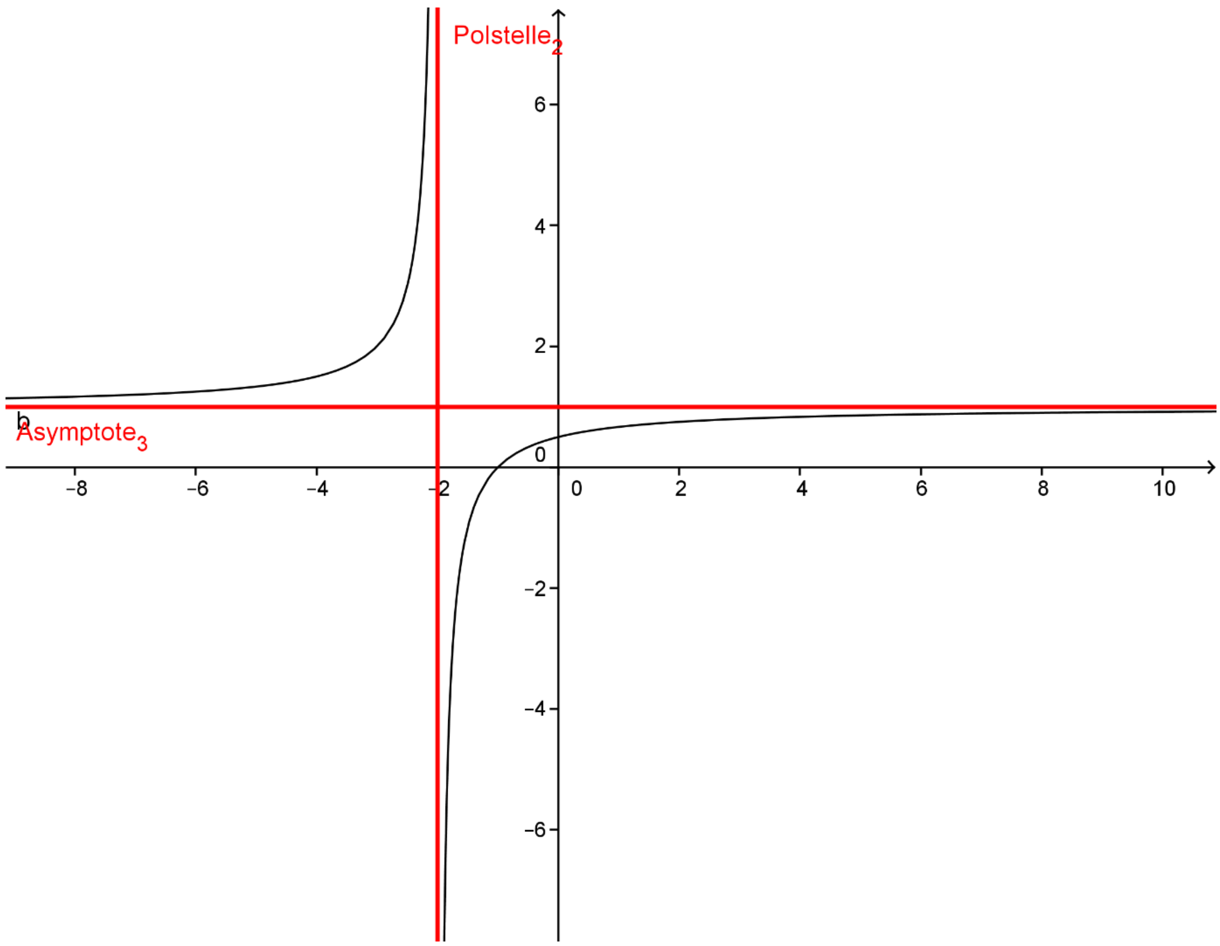
Der Nenner und der Zähler streben gleich schnell gegen unendlich, sodass sich für den Grenzwert eine *Konstante* ergibt:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = C$$

Die Asymptote des Graphen von f ist somit *eine zur x-Achse parallele Gerade*.

Beispiel: $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ $\rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x+2} + \frac{1}{x+2} = 1 + 0 = 1$

$\rightarrow \lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} \frac{x+1}{x+2} = \pm\infty$



$f(x) = \frac{Zählerpolynom}{Nennerpolynom}$ ist eine rationale Funktion.

3.) Zählergrad > Nennergrad

Der Nenner strebt langsamer gegen unendlich als der Zähler, sodass man durch eine Polynomdivision *eine von x abhängige Funktion* erhält:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = g(x)$$

Die Asymptote des Graphen von f ist also eine *Funktion, die von x abhängig ist*.

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ → $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \to \pm\infty} x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \dots$

$$= x - 1 + 0$$

→ $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^2}{x+1} = \pm\infty$