EINFÜHRUNG: DETERMINANTE

- Mathematatik Q2
- sp, 2017-03-20

DETERMINANTE - WAS IST DAS?

- Determinante = die Bestimmende
- Determinante einer Matrix M gibt an, ob die Matrix M invertierbar ist.
- **1. Folgerung**: Die Determinante einer Matrix M ist nur bei quadratischen Matrizen sinnvoll! (Warum?)

DETERMINANTE EINER QUADRATISCHEN MATRIX

- **Kriterium**: Wir ordnen einer quadratischen Matrix eine Zahl *det(M)* zu. Gilt: *det(M)* $\neq 0$, dann ist M invertierbar. Kurz:
- **2. Folgerung**: Eine Matrix M ist invertierbar $\Leftrightarrow$ det(M) $\neq 0$

BERECHNEN EINER DETERMINANTE I

Maxima berechnet die Matrix M_{22} wie folgt

```
M_22: matrix([a1,b1],[a2,b2]);

[ a1  b1 ]
[        ]
[ a2  b2 ]

determinant(M_22);
a1 b2 - a2 b1
```

BERECHNEN EINER DETERMINANTE II

Berechnen einer 3x3-Matrizen:

```
M_33: matrix([a1,b1,c1],[a2,b2,c2],[a3,b3,c3]);

[ a1  b1  c1 ]
[            ]
[ a2  b2  c2 ]
[            ]
[ a3  b3  c3 ]

determinant(M_33);
a1 (b2 c3 - b3 c2) - b1 (a2 c3 - a3 c2) + (a2 b3 - a3 b2) c1
```

BERECHNEN EINER DETERMINANTE III

- Berechnen durch **Entwickeln nach der ersten Zeile**
- Beachte: In den Klammern werden 2x2-Determinanten berechnet

Beispiel: $(b_2 c_3 - b_3 c_2)$.

BERECHNEN EINER DETERMINANTE IV

- Determinanten bei 4x4-Matrizen → mühsam (**viel** Rechenarbeit!)
- **3. Folgerung**: Determinanten berechnet besser der Computer!

SCHEMA I

Für die Entwicklung einer 3x3-Determinante gibt es folgende **Vorzeichen-Matrix**

```
[ +   −   + ]
[           ]
[ −   +   − ]
[           ]
[ +   −   + ]
```

- Beispiel: es wurde nach der *ersten Zeile* entwickelt: **+ – +**
- Deshalb wird a_1 positiv, b_1 *negativ* und c_1 wieder positiv genommen.

BEISPIEL

Als Beispiel entwickeln wir nach der **dritten Spalte** und erhalten:

$$c_1\,(a_2\,b_3 - a_3\,b_2) - c_2\,(a_1\,b_3 - a_3\,b_1) + c_3\,(a_1\,b_2 - a_2\,b_1)$$

SCHEMA II

Beliebt ist folgendes **Schema**, bei dem die ersten zwei Spalten nochmals neben die dritte Spalte geschrieben werden:

```
[ a1   b1   c1   a1   b1]
[    ↘    ↗↘   ↗↘   ↗    ]
[ a2   b2   c2   a2   b2]
[    ↗    ↗↘   ↗↘    ↘   ]
[ a3   b3   c3   a3   b3]
```

Pfeile, die schräg nach **unten** verlaufen, werden **positiv** gezählt, Pfeile, die schräg nach *oben* verlaufen, *negativ*:

$$\mathbf{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1}$$

SCHREIBWEISE VON DETERMINANTEN

```
     | a1   b1 |
     |         | = a1 b2 - a2 b1
     | a2   b2 |
```

also statt Klammern einfach gerade Striche!

BEISPIEL 2

```
M1: matrix([1.0,0.0,1.0],[0.0,1.0,1.0],[0.0,0.0,1.0]);
                              [ 1.0  0.0  1.0 ]
                              [               ]
                              [ 0.0  1.0  1.0 ]
                              [               ]
                              [ 0.0  0.0  1.0 ]
```

```
determinant(M1);
                1.0
```

BEISPIEL 3

```
M3: matrix([1.0,3.0,1.0],[2.0,6.0,1.0],[0.0,0.0,1.0]);
                              [ 1.0  3.0  1.0 ]
                              [               ]
                              [ 2.0  6.0  1.0 ]
                              [               ]
                              [ 0.0  0.0  1.0 ]

       determinant(M3);
                                      0.0
```

BEISPIEL 4

```
M4: matrix([1.0,3.0,1.0],[2.0,4.0,1.0],[0.0,0.0,0.0]);
                         [ 1.0  3.0  1.0 ]
                         [               ]
                         [ 2.0  4.0  1.0 ]
                         [               ]
                         [ 0.0  0.0  0.0 ]

 determinant(M4);
                              0.0
```

BEISPIEL 5

```
M2: matrix([1.0,3.0,1.0],[2.0,1.0,1.0],[0.0,2.0,1.0]);
                         [ 1.0  3.0  1.0 ]
                         [               ]
                         [ 2.0  1.0  1.0 ]
                         [               ]
                         [ 0.0  2.0  1.0 ]

 determinant(M2);
                              - 3.0
```

ÜBEN

- **Aufgabe:** Berechne die Determinante in den Beispielen 2 - 5 von Hand nach (mühsam, aber wichtig!).

→ Die Beispiele online

ENDE

- Präsentation erstellt mit Reveal.js
- Präsentation online: kommt noch . . .