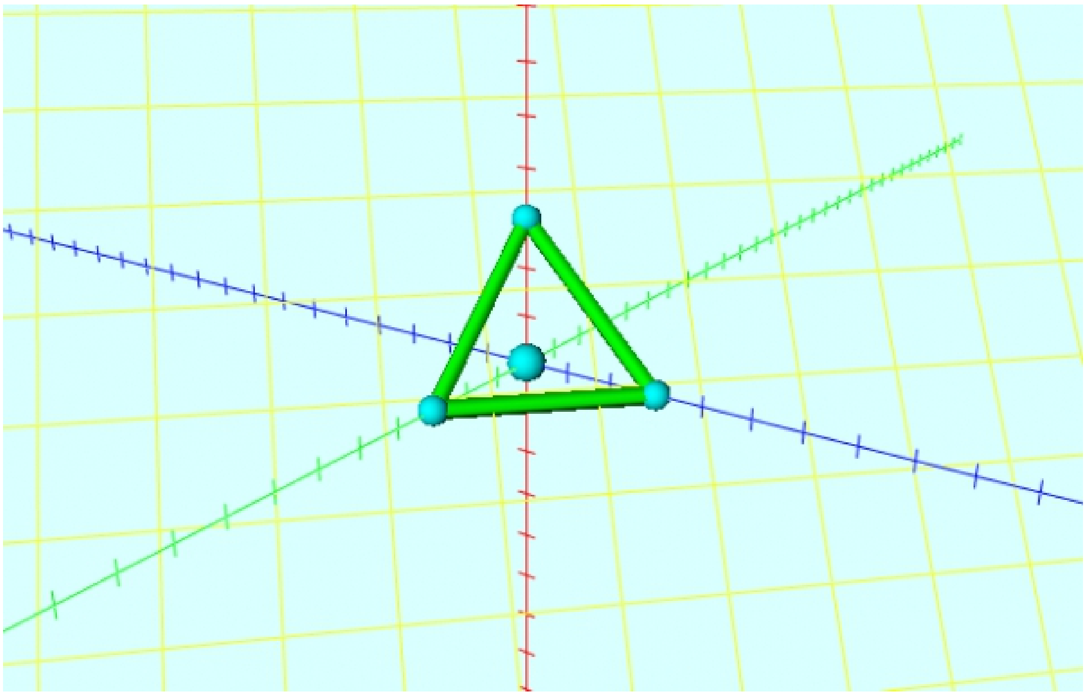
Ebenen

- → **Mathematik Q2**

Ebenengleichung in Parameterform

Eine Ebene E wird durch drei Punkte festgelegt (Warum?). Dann legen die drei Punkte A, B und C der Grundseite eines Tetraeders auch eine Ebene fest:



Koordinaten der Punkte: A(0|0|3), B(3|0|0) und C(0|3|0).

Bei der Beschreibung der Ebenen durch Vektoren gehen wir analog zur Geradengleichung vor: Wir benötigen

- einen Stützvektor: dies kann einer der drei Punkte der Grundseite des Tetraeders sein, z. B. der Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ zum Punkt A(0|0|3): $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Der Vektor $\vec{u}$ filtert diejenige Ebene aus der Schar paralleler Ebenen, die durch den Punkt A geht.
- zwei Richtungsvektoren: $\overrightarrow{AB} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

Über die Richtungsvektoren können wir durch eine geeignete Linearkombination jeden Punkt P der Ebene E „ereichen". Dazu multiplizieren wir die Richtungsvektoren mit den beiden Parametern r ∈ ℜ und s ∈ ℜ, als Ergebnis erhalten wir die **Parameterform der Ebenengleichung**:

E: $\vec{x} = \vec{u} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$

- **Beachte:** Der Vektor $\vec{x}$ steht wieder für einen beliebigen Punkt X in E, X ∈ E. Mit dieser Schreibweise beschreiben wir die Punktmenge derjenigen Punkte, die in E liegen.

Im Tetraeder-Beispiel erhalten wir für die Grundseite die Ebene E_{ABC}:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- **Hinweis:** Man zeichnet eine Ebene in ein Koordinatensystem, indem man die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen verbindet. Es entsteht ein Dreieck (siehe oben).

- **Aufgabe 1:** Bestimme folgende Punkte auf E_{ABC}: P_{02}, P_{10} und P_{-47} für
    - r=0, s=2
    - r=1, s=0
    - r=-4, s=7

- **Aufgabe 2:** Bestimme eine zu E_{ABC} parallele Ebene E_0, die den Nullpunkt (0|0|0) enthält.

- **Aufgabe 3:** Liegen folgende Punkte in der Ebene E_{ABC}?
    - Punkt G(3|3|3)
    - Punkt H(6|9|0)
    - Punkt Q(6|9|-12)

- Die Problemstellung in **Aufgabe 3** nennt man **Punktprobe**. Sie führt auf ein sogenanntes **überbestimmtes LGS**. Dazu setzen wir den Punkt G, H oder Q auf der linken Seite in die **Parameterform** der Ebenengleichung ein. Da wir mehr Gleichungen als Unbekannte haben (**überbestimmt**!), müssen die Parameter r und s **alle** drei Gleichungen erfüllen.

- **Wichtig:** Man löst Vektorgleichungen, indem man sie auf „Koordinatengleichungen" zurückführt. Das ergibt dann ein **LGS**.

Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen

Bei der gegenseitigen Lage einer Ebene E und einer Geraden g können **drei Fälle** eintreten:

1. Fall: Die Gerade g schneidet die Ebenen E in einem Punkt S.
2. Fall: Die Gerade g liegt in einer zur Ebenen E parallelen Ebene F.
3. Fall: Die Gerade g liegt in der Ebene E.

Den drei Fällen entsprechen Lösungsmengen von **LGS**.

- **Aufgabe 4:**
    - Bestimme eine Gleichung der Ebene F in Parameterform, die durch die Punkte B(3|0|0), C(0|3|0) und D(3|3|3) festgelegt ist.

Lagebeziehungen von Ebenen

Bei der gegenseitigen Lage der Ebenen E und F können **drei Fälle** eintreten:

1. Fall: Die beiden Ebenen E und F schneiden sich in einer Geraden g.
2. Fall: Die beiden Ebenen E und F sind parallel (→ **Aufgabe 2**).
3. Fall: Die beiden Ebenen E und F sind identisch.

Den drei Fällen entsprechen wieder Lösungsmengen von **LGS**, wobei wir wegen der vier Parameter r, s, k und t (aus der Ebene E: Parameter r und s; aus der Ebene F: Parameter k und t) diesmal weniger

Gleichungen als Unbekannte haben. Es handelt sich also um ein **unterbestimmtes Gleichungssystem** - dann können wir aber nicht mehr eine eindeutige Lösung erwarten (Warum?). Statt dessen ergibt sich eine Lösung in Abhängigkeit von einem Parameter (Warum?). Das macht auch Sinn: die Schnittmenge zwischen zwei Ebenen ist eine Gerade g, und für die Beschreibung einer **Geraden in Parameterform** benötigen wir einen Parameter!

- **Aufgabe 5:**
  - Bestimme eine Gleichung der Ebene F in Parameterform, die durch die Punkte B(3|0|0), C(0|3|0) und D(3|3|3) festgelegt ist.
- **Aufgabe 6:**
  - Bestimme die gegenseitige Lage der Ebene E_{ABC} und der Ebene F aus **Aufgabe 5**.
- **Aufgabe 7:**
  - Zeige: Die beiden Ebenen E_{ABC} und E_0 (→ **Aufgabe 2**) haben keinen Punkt gemeinsam. Wie sieht in diesem Fall die Lösungsmenge aus?

Üben

Einfache Übungsaufgaben:

- Bestimme im Beispiel-Würfel die Diagonal-Ebene durch die Punkte A(4|0|0), D(0|0|0) und F(4|4|4).
  Welche weiteren Punkte des Würfels sind in dieser Ebene? (Antwort: der Punkt G → Punktprobe!)
- Im *Cornelsen 2.2* findet sich auf S. 118 eine ähnliche Aufgabe: Nr. 6
- Daneben sind die beiden Aufgaben Nr. 3 und Nr. 4 auf S. 118 im *Cornelsen 2.2* empfehlenswert!

Wichtige Übungen aus dem *Cornelsen 2.2*:

- Übung 10 auf S. 131 sowie die Übungen auf S. 133
- Anspruchsvoller sind die Aufgaben Nr. 25 - Nr. 29 auf den Seiten 136-137 sowie die Aufgabe Nr. 46 auf S. 145
- Daneben enthält der *Cornelsen* auf den Seiten 150-151 sog. „zusammengesetzte Aufgaben", die sich an Abituraufgaben orientieren (viel Arbeit!)
- Im **WWW** gibt es auf **Mathe Online** unter Analytische Geometrie 2 den Punkt **Ebenen bestimmen** → gute Übung!
