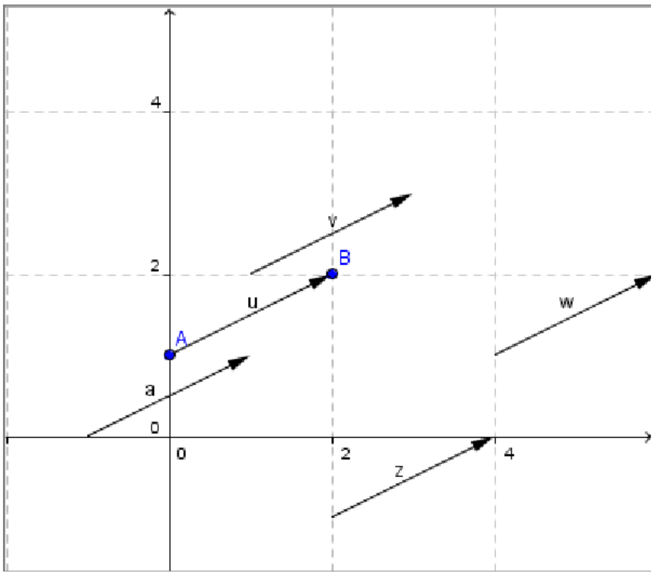
Geraden

- → **Mathematik Q2**

Geradengleichung

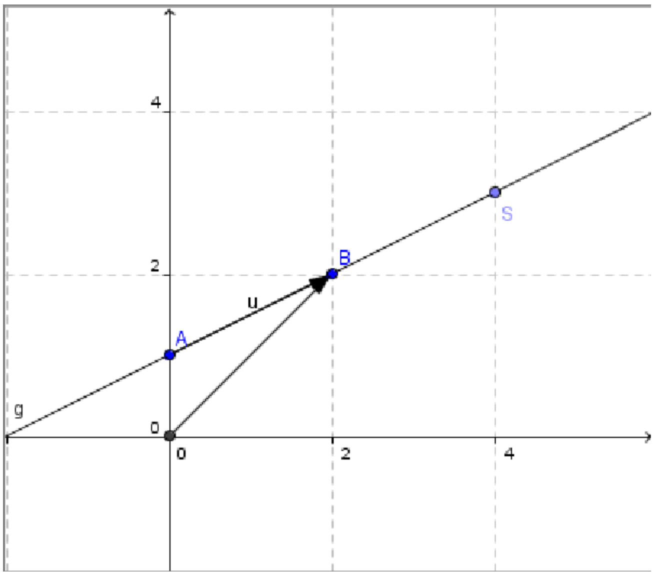
Die Geradengleichung $y = m \cdot x + b$ verknüpft x - und y-Koordinaten miteinander. Da eine Gerade durch zwei Punkte A und B festgelegt ist, können wir die Richtung der Geraden durch einen „Pfeil" $\vec{v}$ von A nach B erklären: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$ Damit haben wir aus der Schar der parallelen Geraden aber noch keine ausgewählt:



Download — Erstellt mit © GeoGebra durch wspiegel

In der Sprache der Geradengleichung: wir kennen nur die Steigung m. Um eine bestimmte Gerade aus der parallelen Geradenschar auszuwählen, sagen wir: Nimm diejenige Gerade g, die durch den Punkt B(2|2) geht. Wie kommen wir zum Punkt B? Durch die Verschiebung vom Ursprung O nach B, also: $\vec{u} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ Wir benötigen also für die Beschreibung einer Geraden zwei Vektoren:

- den Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dieser Vektor legt die Richtung der Geraden fest.
- den Stützvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Der Vektor $\vec{u}$ filtert diejenige Gerade aus der Parallelenschar, die durch den Punkt B geht.
- Jetzt wird summiert: $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$
  Aber halt, da fehlt noch etwas: $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
  Das ist ja nur ein einziger Punkt S(4|3). Wie kommen wir zu den anderen Punkten der Geraden g?



Download — Erstellt mit © GeoGebra durch wspiegel

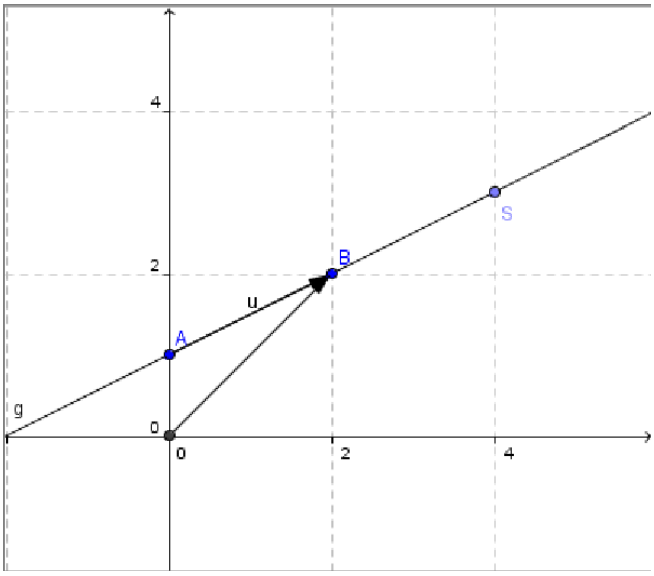
- Durch den Stützvektor $\vec{u}$? Nein, denn der führt nur zu einem bestimmten Punkt P auf g, Schreibweise: P ∈ g. Wir wollen aber zu **allen** Punkten der Geraden!
- Bleibt also nur noch der Richtungsvektor $\vec{v}$: wenn wir die Länge des Richtungsvektors $\vec{v}$ variieren, dann können wir jeden Punkt P auf g erreichen. Wir benötigen also einen Parameter r ∈ ℜ, dann erhalten wir: $r \cdot \vec{v}$
- **Aufgabe 1:** Was bedeutet die Schreibweise $r \cdot \vec{v}$?
- Unser Ergebnis nennt sich **Geradengleichung in Parameterform**:

$$g\colon \vec{x} = \vec{u} + r \cdot \vec{v}$$

- **Beachte:** Der Vektor $\vec{x}$ steht hier für einen beliebigen Punkt X auf g, X ∈ g. Wir beschreiben mit dieser Schreibweise genau diejenigen Punkte, die auf g liegen. Man nennt das auch eine **Punktmenge**.
- **Aufgabe 2:** Bestimme folgende Punkte auf g: P_0, P_1 und P_{-4} für r=0, r=1 und r=-4
- **Aufgabe 3:** Bestimme eine zu g parallele Gerade h in **Parameterform**
- **Aufgabe 4:** Liegen folgende Punkte auf g?
  - Punkt G(-4|-3)
  - Punkt H(7|9)
  - Punkt Q(5|3.5)
- Die Problemstellung in **Aufgabe 4** nennt man übrigens **Punktprobe**. Sie führt auf ein sogenanntes **überbestimmtes LGS**. Dazu setzen wir den Punkt G, H oder Q auf der linken Seite in die **Parameterform** der Geradengleichung ein. Da wir mehr Gleichungen als Unbekannte haben (**überbestimmt**!), muss der Parameter **alle** Gleichungen erfüllen.
- **Hinweis:** Man löst Vektorgleichungen, indem man sie auf die „Koordinatengleichungen" zurückführt. Das ergibt dann ein **LGS**.

Geraden in Geogebra

GeoGebra ist ein sogenanntes **interaktives Geometrie-Programm**: Im Geogebra-Fenster kann man Punkte oder Geraden „anfassen" und verschieben.



Download — Erstellt mit © GeoGebra durch wspiegel

Dadurch kann der Stützvektor $\overrightarrow{OB}$ zu einer anderen Stelle auf der Geraden g verschoben werden. Und wenn wir den Stützvektor $\overrightarrow{OB}$ zu einem Punkt P verschieben, der nicht auf g liegt (Schreibweise: P ∉ g), dann ändert sich die komplette Gerade! Das „klappt" aber nicht mit dem Punkt S: der ist gewissermaßen an die Gerade g „gebunden". M. a. W.: der Punkt S lässt sich nur auf der Geraden g verschieben.

Und der Richtungsvektor $\vec{u}$? Verändern wir die Lage des Punktes A, so verändern wir auch den Richtungsvektor $\vec{u}$. Damit können wir den Richtungsvektor $\vec{u}$ strecken und stauchen! Und ändern wir den Punkt A so ab, dass er nicht mehr auf g liegt (A ∉ g), dann verändern wir damit auch die Gerade → Ausprobieren!

Lagebeziehungen von Geraden

Neben der Vektordarstellung von Geraden untersuchen wir noch die gegenseitige Lage von Geraden.

1. Fall: Die beiden Geraden g und h in Parameterform schneiden sich in einem Punkt S.
2. Fall: Die beiden Geraden g und h sind parallel (→ **Aufgabe 3**).
3. Fall: Die beiden Geraden g und h sind identisch.

- **Aufgabe 5:**
  - **a)** Bestimme zur Geraden g eine Gerade h_1, die g im Punkt S(-2|0) schneidet: $S = g \cap h_1$
  - **b)** Bestimme eine zur Geraden g identische Gerade h_2 mit unterschiedlichem Stützvektor $\vec{u}_2$ und unterschiedlichem Richtungsvektor $\vec{v}_2$.

Üben

Wichtige Übungen:

- Im *Cornelsen* auf der Seite 64 die
  - Übung 9
  - sowie Nr. 13 und Nr. 14 auf S. 65
- Empfehlenswert ist die Seite zum Beispiel-Würfel (pdf-Datei)

Zur **Lage von Geraden** finden sich Übungen auf der Seite 71 bzw. auf den Seiten 79 bis 82 (umfangreich!)

Im **3D-Koordinatensystem** gibt es drei ausgezeichnete Ebenen, die sog. **Koordinatenebenen**:

- xy-Ebene
- xz-Ebene
- yz-Ebene

Die Schnittpunkte von Geraden mit diesen Koordinatenebenen nennt man **Spurpunkte**, vgl. hierzu S. 76 - 78 im *Cornelsen*. Empfehlenswert ist hier

- Übung 2 bzw. Übung 3 auf S. 76 sowie
- Übung 5 auf S. 78

- Im **WWW** gibt es auf **Mathe Online** unter Analytische Geometrie 1 den Punkt **Geraden im Raum bestimmen** → nette Übung!