Lineare Gleichungssysteme mit Gauss

- → **Mathematik Q2**

Aufgabe zum Viehhandel im alten China

- → Quelle: **Benno Artmann, Günter Törner: Lineare Algebra und Geometrie, S. 10**
- Ausgabe des Gleichungssystems:

```
 2.00*x +  5.00*y - 13.00*z  = 1000.00

 3.00*x -  9.00*y +  3.00*z  =    0.00

-5.00*x +  6.00*y +  8.00*z  = -600.00
```

- Schritt 1:

```
|  -5.00   6.00   8.00  -600.00 |
|   0.00  -5.40   7.80  -360.00 |
|   0.00   7.40  -9.80   760.00 |
```

- Schritt 2:

```
|  -5.00   6.00   8.00  -600.00 |
|   0.00   7.40  -9.80   760.00 |
|   0.00   0.00   0.65   194.59 |
```

- Vor **Rückwärtselimination**:

```
|  -5.00   6.00   8.00  -600.00 |
|   0.00   7.40  -9.80   760.00 |
|   0.00   0.00   0.65   194.59 |
```

- Ergebnis der Gausselimination:

```
|   1.00   0.00   0.00  1200.00 |
|   0.00   1.00   0.00   500.00 |
|   0.00   0.00   1.00   300.00 |
```

- Lösung:
  - x = 1200.0
  - y = 500.0
  - z = 300.0
- Lösungsvektor **L** = **{ (1200.0 | 500.0 | 300.0) }**

Gausssches Eliminationsverfahren

- Worin besteht das Problem beim Lösen **l**inearer **G**leichungs**s**ysteme (= **LGS**)?
  - Der Vorgang beim Lösen muss **organisert** werden: wir brauchen ein **Schema**!

Betrachten wir das LGS

```
 2.00*x +  5.00*y - 13.00*z  = 1000.00
 3.00*x -  9.00*y +  3.00*z  =    0.00
-5.00*x +  6.00*y +  8.00*z  = -600.00
```

so fällt auf, dass für den Lösungsprozeß die Variablen x, y, und z unerheblich sind. Wir müssen uns nur merken: x steht in der 1. Spalte, y steht in der 2. Spalte und z steht in der 3. Spalte. Verzichten wir auf die Variablen, so erhalten wir das **Zahlenschema**:

```
     2.00 +  5.00 - 13.00  = 1000.00
     3.00 -  9.00 +  3.00  =    0.00
    -5.00 +  6.00 +  8.00  = -600.00
```

Betrachte den Schritt vor der **Rückwärtselimination**:

```
     |  -5.00   6.00   8.00  -600.00 |
     |   0.00   7.40  -9.80   760.00 |
     |   0.00   0.00   0.65   194.59 |
```

Eine Lösung für z in der 3. Zeile ergibt sich durch die Division:

```
194.59 / 0.65  → z =  300.0 (Zahlen gerundet!)
```

Setzen wir diese Lösung in die 2. Zeile, so erhalten wir für y die Lösung y = 500.0. Einsetzen der beiden Lösungen in die 1. Zeile ergibt schließlich: x = 1200.0. Man nennt diesen Prozeß **Rückwärtselimination**. Unser Ziel ist also ein LGS der Form

```
     |   *   *   *   * |
     |   0   *   *   * |
     |   0   0   0   * |
```

wobei der Stern für beliebige Zahlen steht. Man nennt diese Form **Zeilenstufenform** oder **Dreiecksform**. Durch die **Rückwärtselimination** erhalten wir dann die Lösung:

```
     |   1.00   0.00   0.00  1200.00 |
     |   0.00   1.00   0.00   500.00 |
     |   0.00   0.00   1.00   300.00 |
```

- Frage: Wie erhalten wir die **Dreiecksform**?
    - Antwort: durch **Äquivalenzumformungen**.

- Welche **Äquivalenzumformungen** sind „erlaubt“?
    - **Äquivalenzumformungen** beim Lösen von LGS

1. Vertauschen von Zeilen
2. Multiplikation eine Zeile mit einer Zahl $c \neq 0$
3. Addition/Subtraktion einer Zeile zu/von einer anderen Zeile

- **¡Vorsicht!** beim Vertauschen von Spalten
    - **Aufgabe 1:** Weshalb muss man beim Vertauschen von Spalten „aufpassen“?

Beim Studieren der Lösung oben fällt auf: im **1. Schritt** versucht man, durch **Äquivalenzumformungen 0en** in der 1. Spalte in Zeile 2 und 3 zu erreichen:

```
     |  -5.00   6.00   8.00  -600.00 |
     |   0.00  -5.40   7.80  -360.00 |
     |   0.00   7.40  -9.80   760.00 |
```

* Im **2. Schritt** versucht man, durch **Äquivalenzumformungen** eine **0** in der 2. Spalte in Zeile 3 zu erreichen:

```
     |  -5.00   6.00   8.00  -600.00 |
     |   0.00   7.40  -9.80   760.00 |
     |   0.00   0.00   0.65   194.59 |
```

* → Bei einem LGS mit mehr Variablen (= mehr Zeilen bzw. Spalten!) müssen wir diese Schritte entsprechend wiederholen!

Lösungsmenge von LGS

Beim Lösen der folgenden drei Gleichungssysteme

1. Gegeben sei das LGS

```
2x + 3y = 6
4x + 6y = 7
```

2. Gegeben sei das LGS

```
2x + 3y = 6
4x + 6y = 12
```

3. Gegeben sei das LGS

```
2x + 3y = 6
4x + 5y = 12
```

fällt auf:

Ein LGS kann

1. eine **eindeutige Lösung** haben
2. **keine Lösung** haben → man nennt das LGS dann **unlösbar**.
3. **unendlich viele Lösungen** haben.

- **Aufgabe 2:** Interpretiere LGS und Lösung in den drei Fällen jeweils **geometrisch** (Skizze!) → Schlussfolgerung?

Überbestimmte Gleichungssysteme

Bei einem überbestimmten Gleichungssystem haben wir **mehr Gleichungen** als Unbekannte. Beispiel:

```
7x + 10.5y = 21
2x + 3y    = 6
4x + 5y    = 12
```

- **Aufgabe 3:** Löse das überbestimmte Gleichungssystem.

Unterbestimmte Gleichungssysteme

Bei unterbestimmten Gleichungssystemen liegt der umgekehrte Fall vor: Wir haben **weniger Gleichungen** als Unbekannte. Beispiel:

```
2x + 3y    = 6
```

oder

```
4x + 6y = 12
```

Da wir jetzt zu wenig Bestimmungsgleichungen für unsere Unbekannten haben, führt man **Parameter** ein und schreibt die Lösung in Abhängigkeit von einem (oder mehreren) Parameter(n).

- **Aufgabe 4:** Löse das unterbestimmte Gleichungssystem (mit dem **Parameter r** für y).
- **Aufgabe 5:** Interpretiere die Lösung aus **Aufgabe 4** geometrisch.
- Hinweis: unterbestimmte Gleichungssysteme nennt man auch **singulär**.

Üben

Gehen Sie bitte auf folgende Seite von **Arndt Brünner**:

- http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/gleichungssysteme.htm

mit dem Titel **Rechner zum Lösen linearer Gleichungssysteme**

- → Am Ende dieser Seite finden Sie den Punkt: **Zum Üben**
  Es werden zehn LGS erzeugt. Viel Spaß beim Lösen ;-)

Mathematik Q2