Lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit

- → **Mathematik Q2**

Lineare Abhängigkeit

Das Konzept der **linearen Abhängigkeit** hängt eng zusammen mit dem Konzept der **Linearkombination**

Wenn wir einen Vektor $\vec{w}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, . . . , $\vec{u_n}$ schreiben können:

$$\vec{w} = r_1 \cdot \vec{u_1} + r_2 \cdot \vec{u_2} + \ldots + r_n \cdot \vec{u_n}$$

dann ist der Vektor $\vec{w}$ von diesen Vektoren **linear abhängig** (= **l. a.**). Dabei ist der Vektor $\vec{w}$ gegenüber den Vektoren $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, . . . $\vec{u_n}$ nicht ausgezeichnet, soll heißen: Wenn $\vec{w}$ von $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, . . . $\vec{u_n}$ **l. a.** ist, dann ist auch der Vektor $\vec{u_1}$ von den Vektoren $\vec{w}$, $\vec{u_2}$, . . . $\vec{u_n}$ **l. a.**. Begründung (für drei Vektoren):

Sei $\vec{w} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ dann gilt:

$\vec{w} - s \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{r}\vec{w} - \frac{s}{r}\vec{v}$

- In der Ebene (**2D**) entspricht der linearen Abhängigkeit einfach die Gleichung: $\vec{w} = r \cdot \vec{u}$ mit r≠0. Man nennt die beiden Vektoren dann **kollinear**, anschaulich: die beiden Vektoren sind parallel → $\vec{w} \parallel \vec{u}$
- Im Raum (**3D**) erhalten wir die Gleichung: $\vec{w} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ mit r≠0≠s. Man nennt die drei Vektoren dann **komplanar**, anschaulich bedeutet das: die drei Vektoren liegen in einer Ebene.
- Beispiele
  - Die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ sind **l. a.**, also kollinear; für r = 4 gilt ja: $\vec{v} = 4 \cdot \vec{u}$.
  - Die beiden Vektoren $\vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind **linear unabhängig**, da es keine Zahl s gibt, für die gilt: $\vec{e_x} = s \cdot \vec{e_y}$

Das zweite Beispiel legt folgende Definition der **linearen Unabhängigkeit** (= **l. u.**) nahe: n Vektoren $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$, . . . $\vec{u_n}$ nennen wir **linear unabhängig**, falls die Vektorgleichung

$$r_1 \cdot \vec{u_1} + r_2 \cdot \vec{u_2} + \ldots + r_n \cdot \vec{u_n} = \vec{0}$$

als **einzige Lösung** $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ hat.

- Beispiel
  - Wir zeigen die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Vektorgleichung: $r \cdot \vec{e_x} + s \cdot \vec{e_y} = \vec{0}$ schreiben wir als **LGS**:

```
r + 0 = 0
0 + s = 0
```

also gilt: **r=s=0**, und die beiden Vektoren $\vec{e_x}$ und $\vec{e_y}$ sind **l. u.**

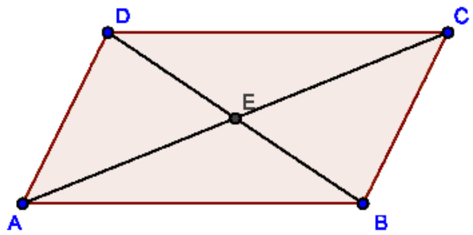
Anwendungen

Die lineare Unabhängigkeit ist grundlegend für das Konzept der **Basis**: Durch drei linear unabhängige Vektoren können wir alle anderen Vektoren im Raum $\Re^3$ erzeugen. Am einfachsten ist hier die Basis mit den drei Einheitsvektoren: $\vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dieses Konzept werden wir noch vertiefen.

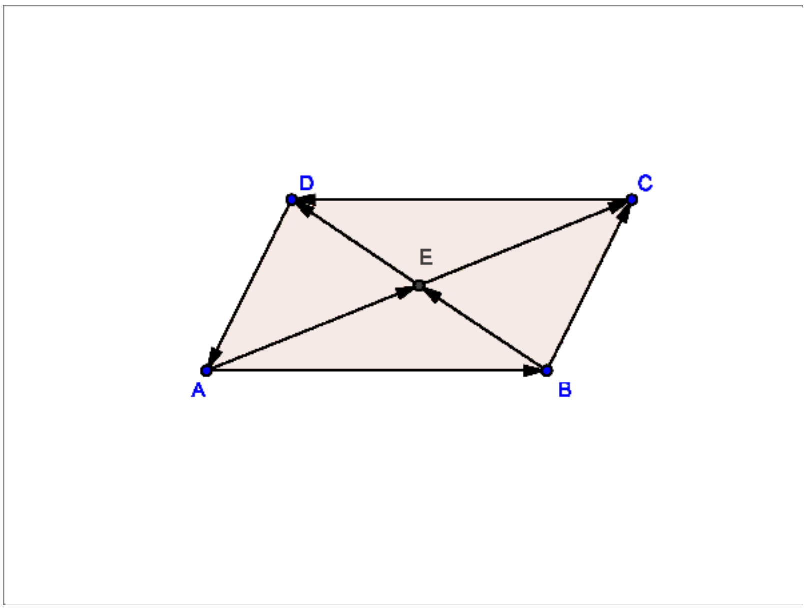
Eine wichtige Anwendung von Vektorketten ist das Beweisen geometrischer Sätze. Beispiel:
Satz: In jedem Parallelogramm ABCD halbieren sich die Diagonalen.

- 1. Schritt: Was müssen wir zeigen? Der Schnittpunkt der Diagonalen sei E, dann müssen wir zeigen: AE = EC bzw. BE = ED.



Download — Erstellt mit © GeoGebra durch wspiegel

- 2. Schritt: Wir übersetzen unser Problem in die Sprache der Vektorrechnung: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$bzw. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{ED}$



Download — Erstellt mit © GeoGebra durch wspiegel

- 3. Schritt: Wir benutzen die Parallelogrammeigenschaft: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$bzw. $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$ und stellen zwei Gleichungen auf:
  - $\overrightarrow{AE} = r \cdot \overrightarrow{AC}$bzw. $\overrightarrow{BE} = s \cdot \overrightarrow{BD}$

- 4. Schritt: Wir sind fertig, wenn wir gezeigt haben: $r = \frac{1}{2} = s$
  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = r \cdot \overrightarrow{AC} - s \cdot \overrightarrow{BD}$
  Jetzt ersetzen wir $\overrightarrow{AC}$ durch $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$bzw. $\overrightarrow{BD}$ durch $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$,
  Ergebnis: $\overrightarrow{AB} = r \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - s \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$
  Wegen $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$erhalten wir $\overrightarrow{AB} = r \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + s \cdot (-\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB})$
  Umsortieren ergibt:
  $\overrightarrow{AB} = (r+s) \cdot \overrightarrow{AB} + (r-s) \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (r+s) \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + (r-s) \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$
  also eine geschlossene Vektorkette!
  Nochmals umsortiert ergibt sich: $(r+s-1) \cdot \overrightarrow{AB} + (r-s) \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$
  Welche Eigenschaft haben wir noch nicht benutzt? Richtig, die lineare Unabhängigkeit! Da die beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ linear unabhängig sind, also **nicht** kollinear sind, kann der Nullvektor $\vec{0}$ eigentlich nur entstanden sein, indem wir die beiden Vektoren jeweils mit dem Faktor **0** multipliziert haben (hier ist die Zahl **0** gemeint!), also
  $0 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$
  Dann erhalten wir aber folgendes LGS:

```
r + s - 1 = 0
r - s     = 0
```

- **Aufgabe 1:** Löse das **LGS**!

- **Aufgabe 2:** Vergleiche diesen Beweis mit dem Beweis im LS auf S. 63 (= Beispiel 1).

Üben

Als Ergänzung ist das **Beispiel 2** auf S. 64 im LS empfehlenswert.

- Sehr wichtig sind die Übungen Nr. 1 und Nr. 2 auf S. 64, sowie Nr. 4 auf S. 65. Viel Erfolg!
