Lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit

- → **Mathematik Q2**

Lineare Abhängigkeit

Das Konzept der **linearen Abhängigkeit** hängt eng zusammen mit dem Konzept der **Linearkombination**

Wenn wir einen Vektor $\vec{w}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}$ schreiben können:

$$\vec{w} = r_1 \cdot \vec{u_1} + r_2 \cdot \vec{u_2} + \ldots + r_n \cdot \vec{u_n}$$

dann ist der Vektor $\vec{w}$ von diesen Vektoren **linear abhängig** (= **l. a.**). Dabei ist der Vektor $\vec{w}$ gegenüber den Vektoren $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}, \ldots \vec{u_n}$ nicht ausgezeichnet, soll heißen: Wenn $\vec{w}$ von $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots \vec{u_n}$ **l. a.** ist, dann ist auch der Vektor $\vec{u_1}$ von den Vektoren $\vec{w}, \vec{u_2}, \ldots \vec{u_n}$ **l. a.**. Begründung (für drei Vektoren):

Sei $\vec{w} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$, dann gilt:

$\vec{w} - s \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{r}\vec{w} - \frac{s}{r}\vec{v}$

- In der Ebene (**2D**) entspricht der linearen Abhängigkeit einfach die Gleichung: $\vec{w} = r \cdot \vec{u}$ mit r≠0. Man nennt die beiden Vektoren dann **kollinear**, anschaulich: die beiden Vektoren sind parallel → $\vec{w} \parallel \vec{u}$
- Im Raum (**3D**) erhalten wir die Gleichung: $\vec{w} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ mit r≠0≠s. Man nennt die drei Vektoren dann **komplanar**, anschaulich bedeutet das: die drei Vektoren liegen in einer Ebene.
- Beispiele
  - Die beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ sind **l. a.**, also kollinear; für r = 4 gilt ja: $\vec{v} = 4 \cdot \vec{u}$.
  - Die beiden Vektoren $\vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind **linear unabhängig**, da es keine Zahl s gibt, für die gilt: $\vec{e_x} = s \cdot \vec{e_y}$.

Das zweite Beispiel legt folgende Definition der **linearen Unabhängigkeit** (= **l. u.**) nahe: n Vektoren $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots \vec{u_n}$ nennen wir **linear unabhängig**, falls die Vektorgleichung

$$r_1 \cdot \vec{u_1} + r_2 \cdot \vec{u_2} + \ldots + r_n \cdot \vec{u_n} = \vec{0}$$

als **einzige Lösung** $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$ hat.

- Beispiel
  - Wir zeigen die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Vektorgleichung:

    $r \cdot \vec{e_x} + s \cdot \vec{e_y} = \vec{0}$ schreiben wir als **LGS**:

    ```
    r + 0 = 0
    0 + s = 0
    ```

    also gilt: **r=s=0**, und die beiden Vektoren $\vec{e_x}$ und $\vec{e_y}$ sind **l. u.**

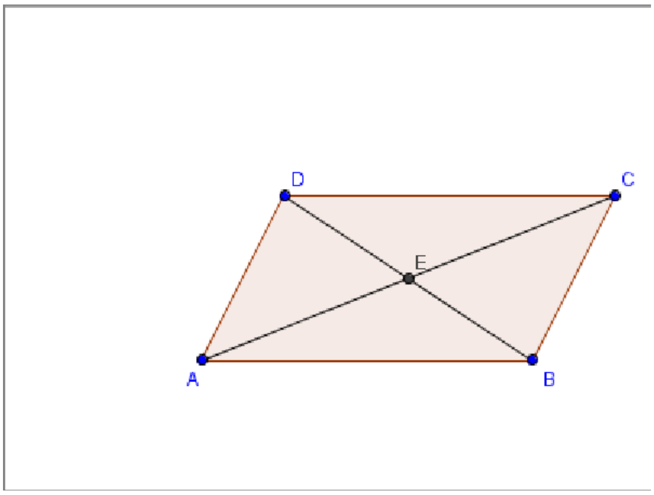
Anwendungen

Die lineare Unabhängigkeit ist grundlegend für das Konzept der **Basis**: Durch drei linear unabhängige Vektoren können wir alle anderen Vektoren im Raum $\Re^3$ erzeugen. Am einfachsten ist hier die Basis mit den drei Einheitsvektoren:
$\vec{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Dieses Konzept werden wir noch vertiefen.

Eine wichtige Anwendung von Vektorketten ist das **Beweisen geometrischer Sätze**. Beispiel:

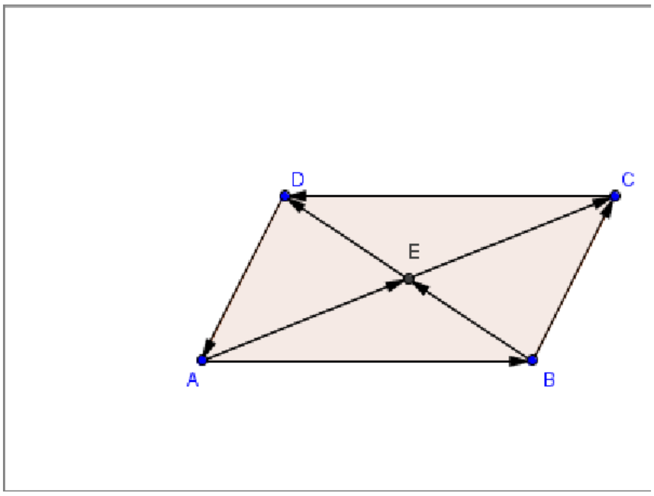
Satz: In jedem Parallelogramm ABCD halbieren sich die Diagonalen.

- 1. Schritt: Was müssen wir zeigen? Der Schnittpunkt der Diagonalen sei E, dann müssen wir zeigen: AE = EC bzw. BE = ED.



Download — Erstellt mit © GeoGebra durch wspiegel

- 2. Schritt: Wir übersetzen unser Problem in die Sprache der Vektorrechnung: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$ bzw. $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{ED}$.



Download — Erstellt mit © GeoGebra durch wspiegel

- 3. Schritt: Wir benutzen die Parallelogrammeigenschaft: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ bzw. $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$ und stellen zwei Gleichungen auf:
  - $\overrightarrow{AE} = r \cdot \overrightarrow{AC}$ bzw. $\overrightarrow{BE} = s \cdot \overrightarrow{BD}$
- 4. Schritt: Wir sind fertig, wenn wir gezeigt haben: $r = \frac{1}{2} = s$
  Dazu stellen wir eine **Vektorkette** auf, benutzen die **lineare Unabhängigkeit** von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ und überführen unser Problem in ein **LGS**.
  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = r \cdot \overrightarrow{AC} - s \cdot \overrightarrow{BD}$
  Jetzt ersetzen wir $\overrightarrow{AC}$ durch $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ bzw. $\overrightarrow{BD}$ durch $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$,
  Ergebnis: $\overrightarrow{AB} = r \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - s \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$
  Wegen $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ erhalten wir $\overrightarrow{AB} = r \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + s \cdot (-\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB})$
  Umsortieren ergibt: $\overrightarrow{AB} = (r+s) \cdot \overrightarrow{AB} + (r-s) \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (r+s) \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + (r-s) \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$
  also eine geschlossene Vektorkette!
  Nochmals umsortiert ergibt sich: $(r+s-1) \cdot \overrightarrow{AB} + (r-s) \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$
  Welche Eigenschaft haben wir noch nicht benutzt? Richtig, die lineare Unabhängigkeit! Da die beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ linear unabhängig sind (d. h. **nicht** kollinear!), kann der Nullvektor $\vec{0}$ eigentlich nur entstanden sein, indem wir die beiden Vektoren jeweils mit dem Faktor **0** multipliziert haben (hier ist die Zahl **0** gemeint!), also
  $0 \cdot \overrightarrow{AB} + 0 \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$
  Dann erhalten wir aber durch Koeffizientenvergleich folgendes LGS:

```
r + s - 1 = 0
r - s     = 0
```

- **Aufgabe 1:** Löse das **LGS**!

Vorgehen beim Beweisen geometrischer Sätze

1. Formuliere die zu beweisende Aussage und mache eine Skizze (!)
2. Überführe die Behauptung in die Vektorschreibweise und überlege, welche Vektoren linear unabhängig sind
3. Berücksichtige die Vorausetzung, im Beweis oben war das die *Parallelität*
4. Suche eine Vektorkette
5. Ersetze in der Vektorkette alle Vektoren durch linear unabhängige Vektoren
6. Sortiere so um, dass sich aus der Eigenschaft der linearen Unabhängigkeit ein LGS ergibt, und löse das LGS

Üben

Im *Cornelsen* wird das Thema *Beweisen* nur in Zusammenhang mit dem **Skalarprodukt** behandelt. Also bleibt nur ein Blick in das WWW: Lineare Unabhängigkeit von G. Roolfs enthält mehrere Aufgaben zum Thema. Empfehlenswert sind dort Aufgabe 2 auf Seite 1 sowie die Aufgabe auf Seite 2. Viel Erfolg!
