

Komplexe Aufgaben

Trigonometrische Funktionen

Eine Präsentation
von Johannes & Nikola

Aufgabenstellung

8. Strandpromenade

Der Aufgang der Strandpromenade zu einem 8 m hohen Deich soll in der Waagerechten 20 m lang sein. Das Planungsbüro erwägt mehrere Varianten.

a) Variante 1:

Die Trassenführung wird durch eine trigonometrische Funktion durch die Punkte A und C realisiert. Dabei soll die Funktion in den Anschlusspunkten A und C die Steigung null haben. Geben Sie die Funktionsgleichung für diese Variante an.

b) Variante 2:

Die Trassenführung wird durch eine ganzrationale Funktion realisiert, die in den Anschlusspunkten A und C die Steigung null hat. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabenteil c)

Berechnen Sie für beide Lösungen den stärksten Anstieg.

Aufgabenteil d)

Der Aufgang soll 2 m breit sein. Bei welcher Trasse wird weniger Sand als Untergrund benötigt?

e) Variante 3

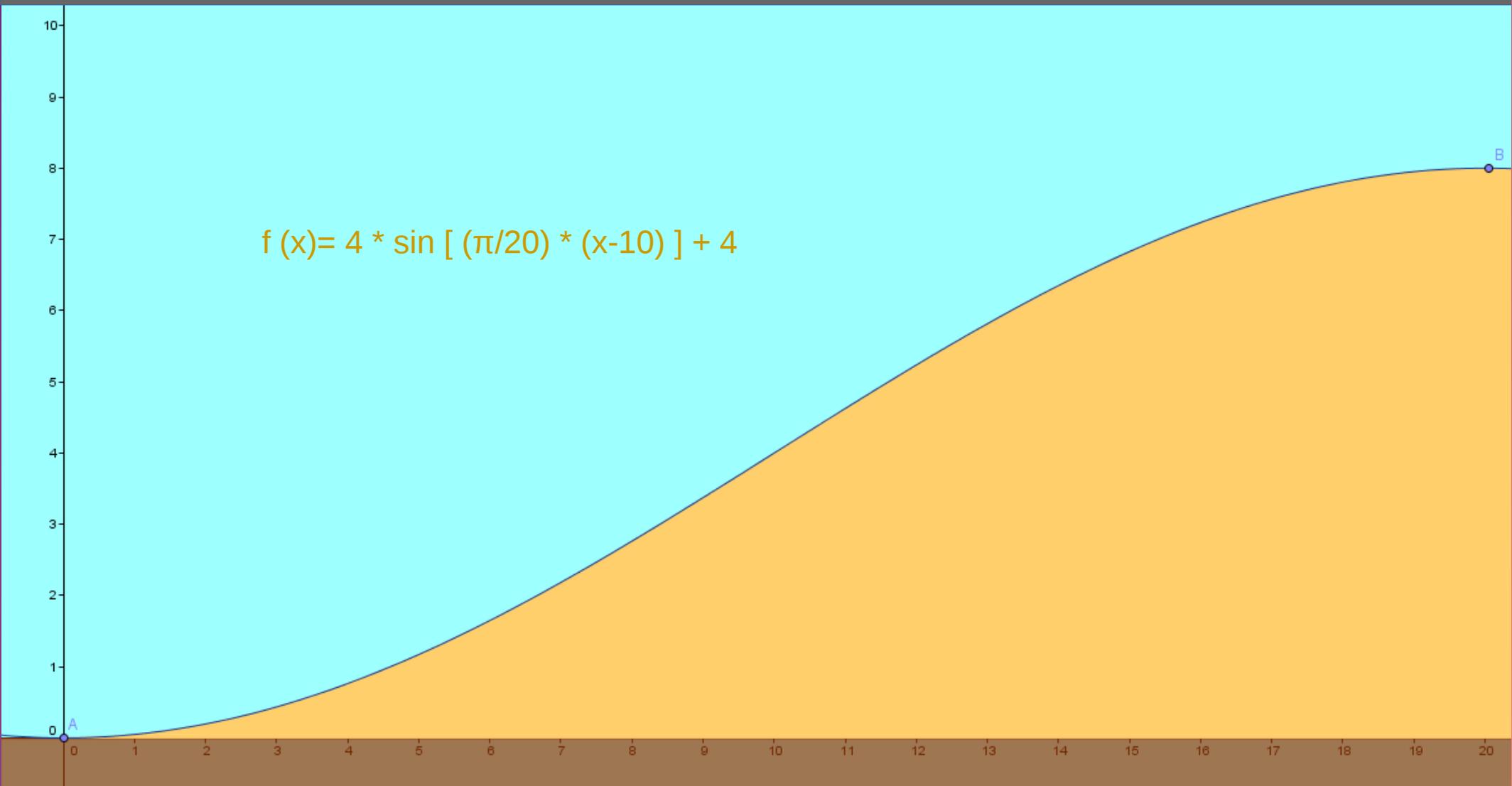
Diese Variante sieht vor, die Punkte A und B durch die Funktion $h_1(x) = e^{ax} - b$ und die Punkte B und C durch die Funktion $h_2(x) = 10 - ce^{-dx}$ zu verbinden. Stellen Sie die Funktionsgleichung auf.

Aufgabenteil f)

Variante 3 soll nur dann vorgeschlagen werden, wenn in den Übergangspunkten A, B und C der Winkel zwischen den beiden Trassen bzw. zwischen jeweils einem Trassenteil und der unteren bzw. oberen Ebene kleiner als 10° ist. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

Variante [1]

Angepeilte Funktion



Variante [1]

Bestimmung der Funktion

$$f(x) = a \sin (b(x+c)) + d$$

Gegebene Punkte

A (0|0) C (20|8)

$$a = \text{Amplitude} = 8:2 = 4$$

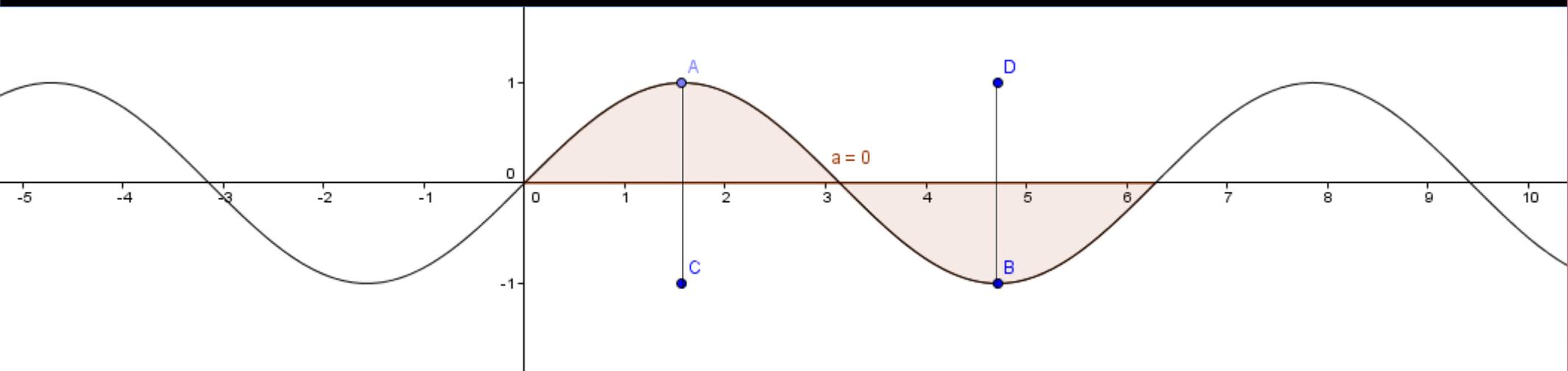
$$b = (2*\pi)/\text{Periode} = (2*\pi)/40$$

$$c = \text{Verschiebung auf x-Achse} = -10$$

$$d = \text{Verschiebung auf y-Achse} = 4$$

Periode & Amplitude

Natürliche Sinusfunktion



Variante [1]

Bestimmung der Funktion

$$f(x) = a \sin (b(x+c)) + d$$

Gegebene Punkte

A (0|0) C (20|8)

$$a = \text{Amplitude} = 8:2 = 4$$

$$b = (2*\pi)/\text{Periode} = (2*\pi)/40$$

$$c = \text{Verschiebung auf x-Achse} = -10$$

$$d = \text{Verschiebung auf y-Achse} = 4$$

$$\text{Daraus folgt } \rightarrow f(x) = 4 * \sin [(\pi/20) * (x-10)] + 4$$

Aufgabenstellung

8. Strandpromenade

Der Aufgang der Strandpromenade zu einem 8 m hohen Deich soll in der Waagerechten 20 m lang sein. Das Planungsbüro erwägt mehrere Varianten.

a) Variante 1:

Die Trassenführung wird durch eine trigonometrische Funktion durch die Punkte A und C realisiert. Dabei soll die Funktion in den Anschlusspunkten A und C die Steigung null haben. Geben Sie die Funktionsgleichung für diese Variante an.

b) Variante 2:

Die Trassenführung wird durch eine ganzrationale Funktion realisiert, die in den Anschlusspunkten A und C die Steigung null hat. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabenteil c)

Berechnen Sie für beide Lösungen den stärksten Anstieg.

Aufgabenteil d)

Der Aufgang soll 2 m breit sein. Bei welcher Trasse wird weniger Sand als Untergrund benötigt?

e) Variante 3

Diese Variante sieht vor, die Punkte A und B durch die Funktion $h_1(x) = e^{ax} - b$ und die Punkte B und C durch die Funktion $h_2(x) = 10 - ce^{-dx}$ zu verbinden. Stellen Sie die Funktionsgleichung auf.

Aufgabenteil f)

Variante 3 soll nur dann vorgeschlagen werden, wenn in den Übergangspunkten A, B und C der Winkel zwischen den beiden Trassen bzw. zwischen jeweils einem Trassenteil und der unteren bzw. oberen Ebene kleiner als 10° ist. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

Variante [2]

Bestimmung der Funktion

Gegebene Bedingungen

$$\begin{array}{ll} A(0|0) & g'(0) = 0 \\ C(20|8) & g'(20) = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \\ g'(x) &= 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c \end{aligned}$$

$$A \rightarrow g(x) \quad \begin{array}{l} 0 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d \\ d = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g'(0) = 3 \cdot a \cdot 0^2 + 2 \cdot b \cdot 0 \\ c = 0 \end{array}$$

I

$$\begin{array}{ll} C \rightarrow g(x) & 8 = a \cdot 20^3 + b \cdot 20^2 \\ & 8 = 8000 \cdot a + 400 \cdot b \\ 0,8 = 800 \cdot a + 40 \cdot b & \\ & 0 = 800 \cdot a + 40 \cdot b - 0,8 \end{array}$$

II

$$\begin{array}{ll} g'(0) = 0 & 0 = 3 \cdot a \cdot 20^2 + 2 \cdot b \cdot 20 \\ & 0 = 1200 \cdot a + 40 \cdot b \end{array}$$

III: II = I

$$\begin{array}{l} 800 \cdot a + 40 \cdot b - 0,8 = 1200 \cdot a + 40 \cdot b \\ - 0,8 = 400 \cdot a \\ a = - 1/500 \end{array}$$

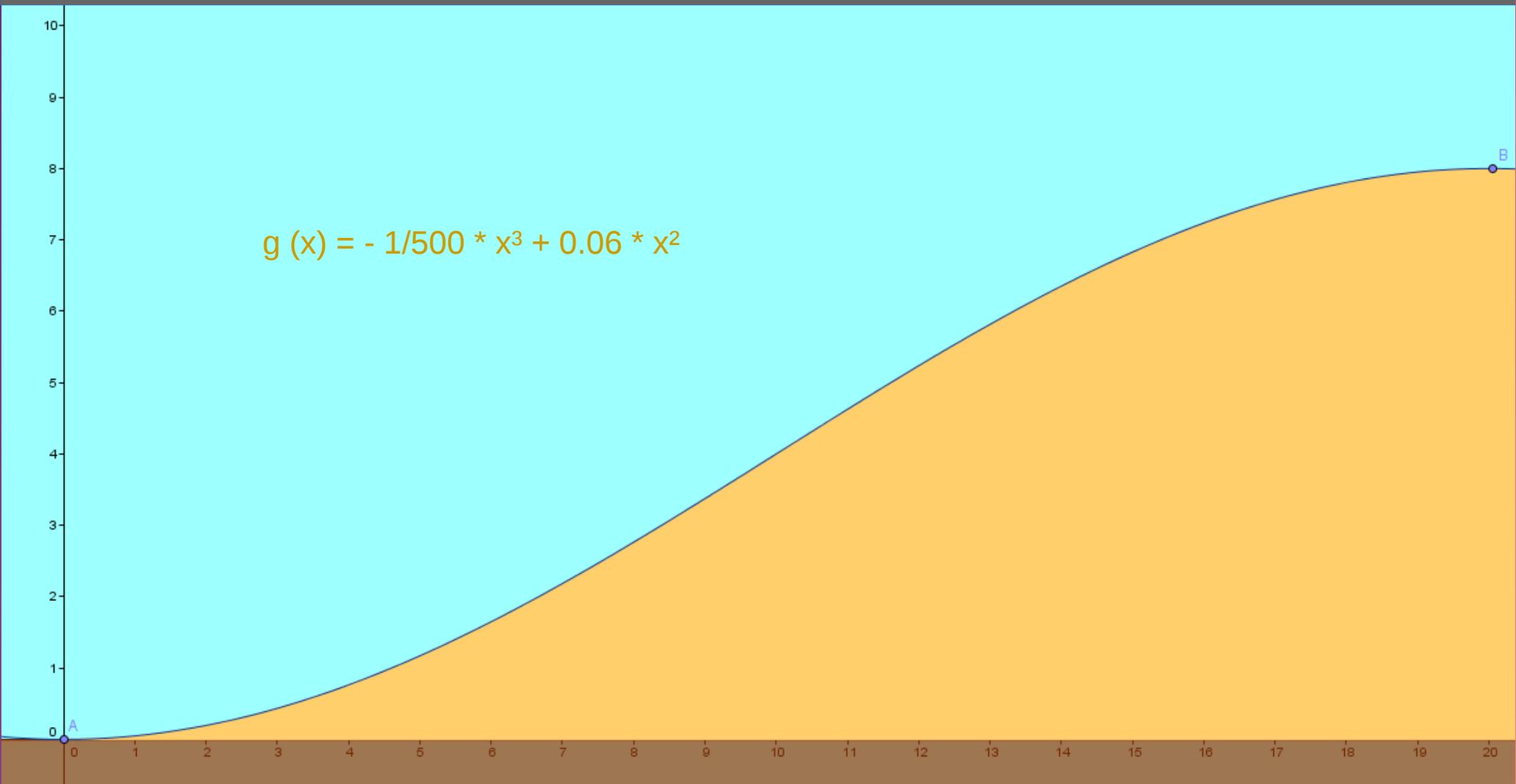
IV: III in I

$$\begin{array}{l} 0,8 = 800 \cdot (- 1/500) + 40 \cdot b \\ 0,8 = -1,6 + 40 \cdot b \\ 2,4 = 40 \cdot b \\ b = 0,06 \end{array}$$

Daraus folgt $\rightarrow g(x) = - 1/500 \cdot x^3 + 0,06 \cdot x^2$

Variante [2]

Bestimmte Funktion



Aufgabenstellung

8. Strandpromenade

Der Aufstieg der Strandpromenade zu einem 8 m hohen Deich soll in der Waagerechten 20 m lang sein. Das Planungsbüro erwägt mehrere Varianten.

a) Variante 1:

Die Trassenführung wird durch eine trigonometrische Funktion durch die Punkte A und C realisiert. Dabei soll die Funktion in den Anschlusspunkten A und C die Steigung null haben. Geben Sie die Funktionsgleichung für diese Variante an.

b) Variante 2:

Die Trassenführung wird durch eine ganzrationale Funktion realisiert, die in den Anschlusspunkten A und C die Steigung null hat. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabenteil c)

Berechnen Sie für beide Lösungen den stärksten Anstieg.

Aufgabenteil d)

Der Aufstieg soll 2 m breit sein. Bei welcher Trasse wird weniger Sand als Untergrund benötigt?

e) Variante 3

Diese Variante sieht vor, die Punkte A und B durch die Funktion $h_1(x) = e^{ax} - b$ und die Punkte B und C durch die Funktion $h_2(x) = 10 - ce^{-dx}$ zu verbinden. Stellen Sie die Funktionsgleichung auf.

Aufgabenteil f)

Variante 3 soll nur dann vorgeschlagen werden, wenn in den Übergangspunkten A, B und C der Winkel zwischen den beiden Trassen bzw. zwischen jeweils einem Trassenteil und der unteren bzw. oberen Ebene kleiner als 10° ist. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

Aufgabenteil c)

Variante [1]

Funktion: $f(x) = 4 * \sin [(\pi/20) * (x-10)] + 4$
1. Ableitung: $f'(x) = 0,2 * \pi * \cos [(\pi/20) * x - 0,5*\pi]$
2. Ableitung: $f''(x) = -(\pi^2/100) * \sin [(\pi/20) * x - 0,5*\pi]$
3. Ableitung: $f'''(x) = -(\pi^3/2000) * \cos [(\pi/20) * x - 0,5*\pi]$

$$f''(x) = 0$$
$$\leftrightarrow 0 = (\pi/20) * x - 0,5 * \pi$$
$$0,5 * \pi = 1/20 * \pi * x$$

$$x = 10$$

$$f'''(10) \sim - 0,016 < 0$$

→ Max

$$f(10) = 4$$

Punkt mit dem höchsten Anstieg von $f(x)$ ist Bf (10|4) → **Steigung $m = 0,6$**

Aufgabenteil c)

Variante [2]

Funktion: $g(x) = -1/500 * x^3 + 0,06 * x^2$
1. Ableitung: $g'(x) = -3/500 * x^2 + 0,12 * x$
2. Ableitung: $g''(x) = -3/250 * x + 0,12$
3. Ableitung: $g'''(x) = -3/250$

$$g''(x) = 0$$
$$0 = -3/250 * x + 0,12$$
$$30 = 3 * x$$

$$x = 10$$

$$g'''(10) = -3/250 < 0$$

→ Max

$$g(10) = 4$$

Punkt mit dem höchsten Anstieg von $f(x)$ ist Bg (10|4) → **Steigung $m = 0,6$**

Aufgabenstellung

8. Strandpromenade

Der Aufgang der Strandpromenade zu einem 8 m hohen Deich soll in der Waagerechten 20 m lang sein. Das Planungsbüro erwägt mehrere Varianten.

a) Variante 1:

Die Trassenführung wird durch eine trigonometrische Funktion durch die Punkte A und C realisiert. Dabei soll die Funktion in den Anschlusspunkten A und C die Steigung null haben. Geben Sie die Funktionsgleichung für diese Variante an.

b) Variante 2:

Die Trassenführung wird durch eine ganzrationale Funktion realisiert, die in den Anschlusspunkten A und C die Steigung null hat. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabenteil c)

Berechnen Sie für beide Lösungen den stärksten Anstieg..

Aufgabenteil d)

Der Aufgang soll 2 m breit sein. Bei welcher Trasse wird weniger Sand als Untergrund benötigt?

e) Variante 3

Diese Variante sieht vor, die Punkte A und B durch die Funktion $h_1(x) = e^{ax} - b$ und die Punkte B und C durch die Funktion $h_2(x) = 10 - ce^{-dx}$ zu verbinden. Stellen Sie die Funktionsgleichung auf.

Aufgabenteil f)

Variante 3 soll nur dann vorgeschlagen werden, wenn in den Übergangspunkten A, B und C der Winkel zwischen den beiden Trassen bzw. zwischen jeweils einem Trassenteil und der unteren bzw. oberen Ebene kleiner als 10° ist. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

Aufgabenteil d)

Variante [1]

Funktion: $f(x) = 4 * \sin [(\pi/20) * (x-10)] + 4$

Stammfunktion: $F(x) = - (80/\pi) * \cos [(\pi/20) * x - 0,5 * \pi] + 4 * x$

$$I = [0;20] \quad [- (80/\pi) * \cos [(\pi/20) * x - 0,5 * \pi] + 4 * x]_0^{20}$$
$$= 80 \text{ FE}$$

$$V = 80 \text{ m}^2 * 2 \text{ m}$$
$$= 160 \text{ m}^3$$

Aufgabenteil d)

Variante [2]

Funktion: $f(x) = - 1/500 * x^3 + 0.06 * x^2$
Stammfunktion: $F(x) = - 1/2000 * x^4 + 0.02 * x^3$

$$I = [0;20] \quad \left[- 1/2000 * x^4 + 0.02 * x^3 \right]_0^{20}$$
$$= 80 \text{ FE}$$

$$V = 80 \text{ m}^2 * 2 \text{ m}$$
$$= 160 \text{ m}^3$$

Aufgabenstellung

8. Strandpromenade

Der Aufgang der Strandpromenade zu einem 8 m hohen Deich soll in der Waagerechten 20 m lang sein. Das Planungsbüro erwägt mehrere Varianten.

a) Variante 1:

Die Trassenführung wird durch eine trigonometrische Funktion durch die Punkte A und C realisiert. Dabei soll die Funktion in den Anschlusspunkten A und C die Steigung null haben. Geben Sie die Funktionsgleichung für diese Variante an.

b) Variante 2:

Die Trassenführung wird durch eine ganzrationale Funktion realisiert, die in den Anschlusspunkten A und C die Steigung null hat. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabenteil c)

Berechnen Sie für beide Lösungen den stärksten Anstieg.

Aufgabenteil d)

Der Aufgang soll 2 m breit sein. Bei welcher Trasse wird weniger Sand als Untergrund benötigt?

e) Variante 3

Diese Variante sieht vor, die Punkte A und B durch die Funktion $h_1(x) = e^{ax} - b$ und die Punkte B und C durch die Funktion $h_2(x) = 10 - ce^{-dx}$ zu verbinden. Stellen Sie die Funktionsgleichung auf.

Aufgabenteil f)

Variante 3 soll nur dann vorgeschlagen werden, wenn in den Übergangspunkten A, B und C der Winkel zwischen den beiden Trassen bzw. zwischen jeweils einem Trassenteil und der unteren bzw. oberen Ebene kleiner als 10° ist. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

Variante [3]

Aufgabenteil e)

$$h_1(x) = e^{ax} - b$$

Gegebene Punkte
A(0|0) B(10|4)

Daraus folgt:

$$h_1(x) = e^{0,16x} - 1$$

$$h_2(x) = 10 - c \cdot e^{-dx}$$

Gegebene Punkte
B(10|4) C(20|8)

Daraus folgt:

$$h_2(x) = 10 - 18 \cdot e^{-0,11x}$$

Aufgabenstellung

8. Strandpromenade

Der Aufgang der Strandpromenade zu einem 8 m hohen Deich soll in der Waagerechten 20 m lang sein. Das Planungsbüro erwägt mehrere Varianten.

a) Variante 1:

Die Trassenführung wird durch eine trigonometrische Funktion durch die Punkte A und C realisiert. Dabei soll die Funktion in den Anschlusspunkten A und C die Steigung null haben. Geben Sie die Funktionsgleichung für diese Variante an.

b) Variante 2:

Die Trassenführung wird durch eine ganzrationale Funktion realisiert, die in den Anschlusspunkten A und C die Steigung null hat. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

Aufgabenteil c)

Berechnen Sie für beide Lösungen den stärksten Anstieg.

Aufgabenteil d)

Der Aufgang soll 2 m breit sein. Bei welcher Trasse wird weniger Sand als Untergrund benötigt?

e) Variante 3

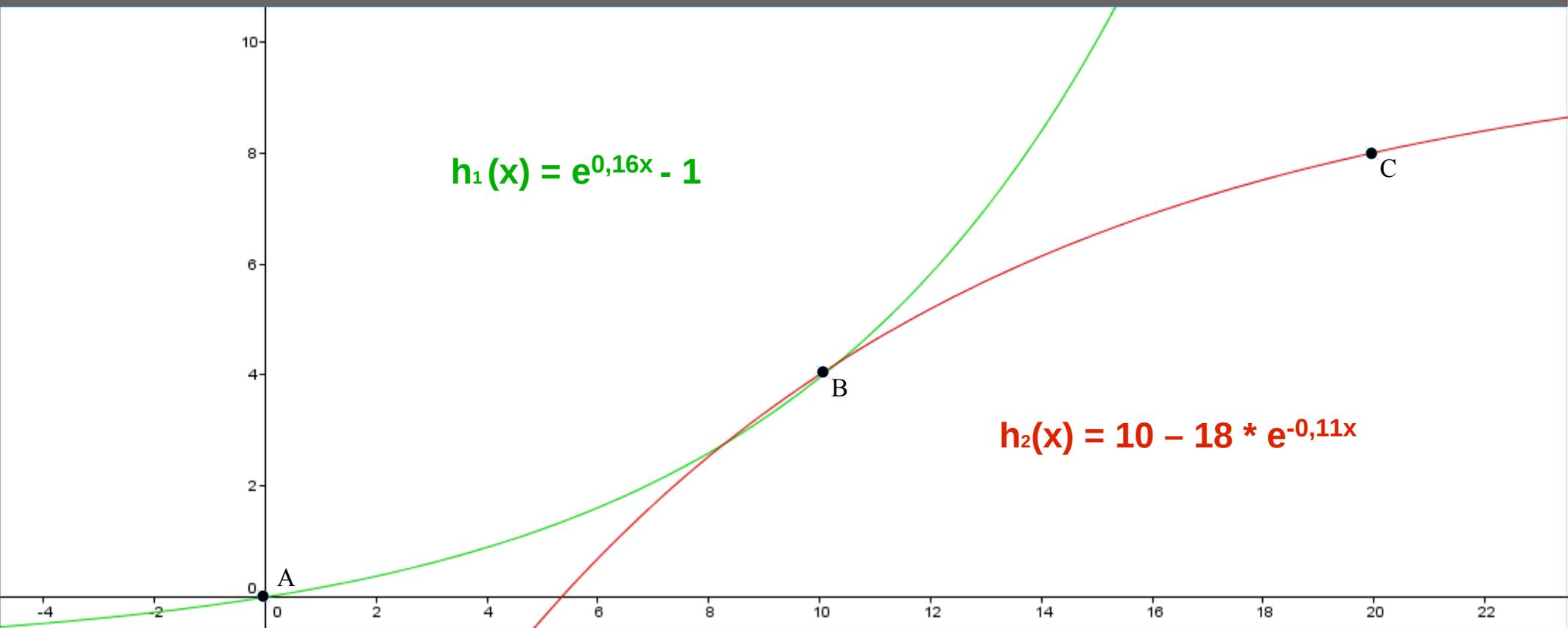
Diese Variante sieht vor, die Punkte A und B durch die Funktion $h_1(x) = e^{ax} - b$ und die Punkte B und C durch die Funktion $h_2(x) = 10 - ce^{-dx}$ zu verbinden. Stellen Sie die Funktionsgleichung auf.

Aufgabenteil f)

Variante 3 soll nur dann vorgeschlagen werden, wenn in den Übergangspunkten A, B und C der Winkel zwischen den beiden Trassen bzw. zwischen jeweils einem Trassenteil und der unteren bzw. oberen Ebene kleiner als 10° ist. Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

Aufgabenteil f)

Winkelbestimmung

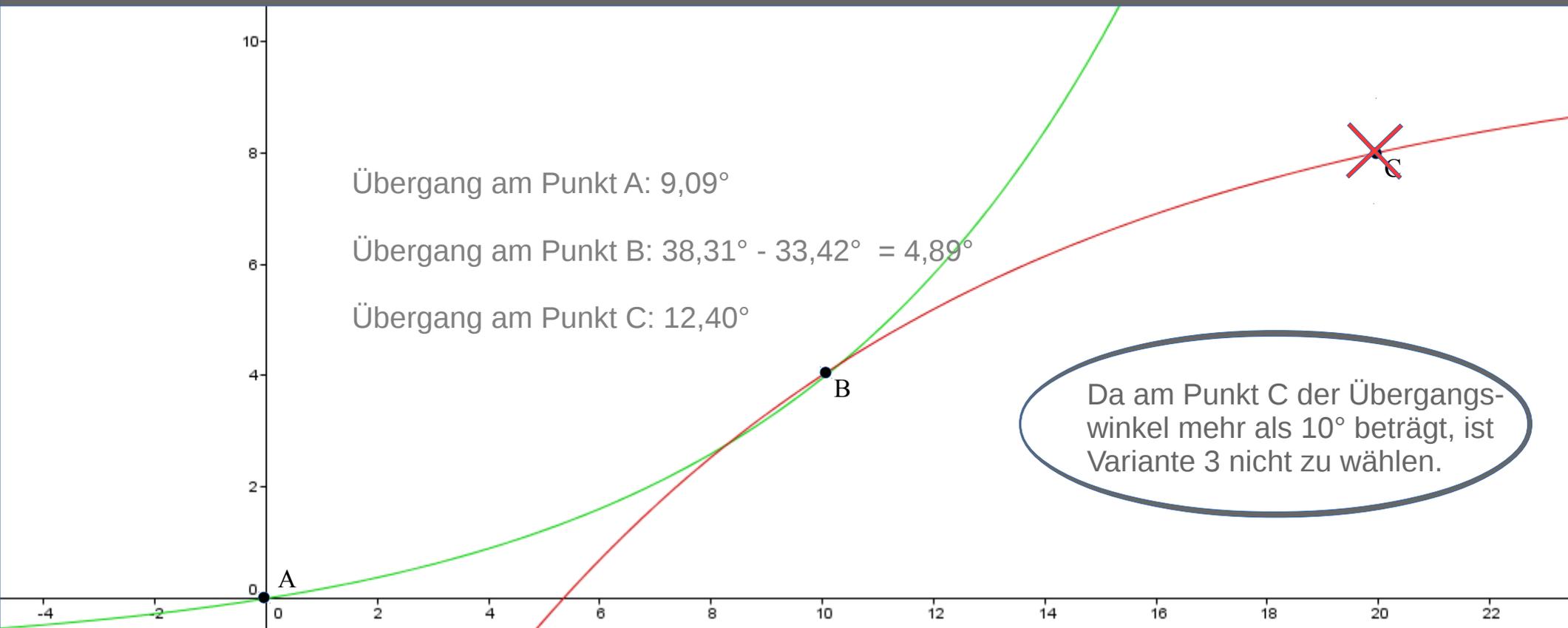


$$h_1'(x) = 0,16 * e^{0,16x}$$

$$h_2'(x) = 1,98 * e^{-0,11x}$$

Aufgabenteil f)

Winkelbestimmung



$$h_1'(10) = 0,79$$

$$h_2'(10) = 0,66$$

$$h_1'(0) = 0,16$$

$$h_2'(20) = 0,22$$

Ende

Vielen Dank für's Zuschauen

Das war eine Präsentation
von Johannes & Nikola
