Kern, Bildmenge & Fixpunkmenge

Wir betrachten eine lineare Abbildung A mit $A\colon V \to W$ (V und W sind Vektorräume!)

- **Kern** einer linearen Abbildung: $\vec{x} \to A \cdot \vec{x} = \vec{0}$
  D. h. im Kern liegen alle $\vec{x} \in V$ mit $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$, die also auf den Nullvektor $\vec{0}$ abgebildet werden.
  Beachte: Der Kern liegt in V, also im „Definitionsbereich" von A

- **Bildmenge** einer linearen Abbildung: $\vec{x} \to A \cdot \vec{x} \neq \vec{0}$
  D. h. in der Bildmenge sind alle $A \cdot \vec{x} \in W$ mit $A \cdot \vec{x} \neq \vec{0}$, die also gerade ***nicht*** auf den Nullvektor $\vec{0}$ abgebildet werden.
  Beachte: Die Bildmenge liegt in W, also im „Wertebereich" von A

- **Fixpunkte** einer linearen Abbildung: $\vec{x} \to A \cdot \vec{x} = \vec{x}$
  D. h. in der Fixpunktmenge sind alle $\vec{x} \in V$ mit $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$. Der Vektor $\vec{x}$ wird also bei der linearen Abbildung A auf sich selbst abgebildet.
  Beachte: Die Fixpunktmenge liegt in V, also im „Definitionsbereich" von A

Beispiel

- **Frage:** Wie bestimme ich Kern bzw. Bild einer Matrix A (= lineare Abbildung!)?
  - Mit Hilfe des Gaussschen Eliminationsverfahrens lösen wir die homogene Gleichung: $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$.
    Die triviale Lösung lautet: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt: *dim(kern(A))* = 0
  - Die entscheidende Frage lautet also: Gibt es Vektoren $\vec{x} \neq \vec{0}$, für die gilt: $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$. Anschaulich werden diese Vektoren dann auf den 0-Punkt projiziert.

- Beispielmatrix (aus dem Wikibook Mathe für Nicht-Freaks):

```
         [ 4.0  2.0  0.0 ]
         [               ]
   A =   [ 3.0   0   1.0 ]
         [               ]
         [ 8.0  1.0  2.0 ]
```

Die Determinante von A ist 0: `determinant(A) = 0.0`, Anwendung des Gaussschen Eliminationsverfahrens ergibt:

```
         %t       2 %t
[x = - ---, y = -----, z = %t]
          3         3
```

mit dem Parameter t. Dann gibt es aber einen 1-dimensionalen Lösungsraum, der bei der linearen Abbildung auf den Nullpunkt abgebildet wird. Beispiel (bitte nachrechnen!):

$A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. In diesem Beispiel werden **alle** Punkte der Geraden: $t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf den Nullpunkt abgebildet (→ Projektion!). Da für unseren Vektorraum V im Beispiel gilt: *dim (V)* = 3, und da der Kern dieser Abbildung 1-dimesional ist: *dim(kern(A))* = 1, gilt nach dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen: *dim (bild(A))* = *dim (V)* - *dim(kern(A))* = 3 - 1 = 2, d. h. die lineare Abbildung projiziert den $\mathbb{R}^3$ in eine Ebene. Oder: Der Bildraum hat die Dimension 2, das entspricht aber gerade einer Ebene.

Dimensionsatz der linearen Algebra

Nach dem **Dimensionsatz** (auch: *Rangsatz*) der linearen Algebra gilt für eine lineare Abbildung A: $V \rightarrow W$ (V, W sind Vektorräume):

$$dim\ (V) = dim\ (kern(A)) + dim\ (bild(A))$$

Verwendet man die Bezeichnungen Defekt *def(A)* für die Dimension des Kerns und Rang *rg(A)* für die Dimension des Bildes der Abbildung A, so lautet der Rangsatz:

$$dim\ (V) = def(A) + rg(A)$$

Aufgaben

- **Aufgabe Nr. 1**: Gegeben sei folgende Matrix $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$
    - **a)** Bestimme zu dieser Matrix den Kern sowie das Bild der linearen Abbildung.
    - **b)** Bestimme die inverse Matrix A_1^{-1} mit $A_1 \cdot A_1^{-1} = E$ (E: Einheitsmatrix) (Lösung)
- Exkurs: **So bestimme ich die inverse Matrix**.
    - Beginne mit folgender erweiterter Matrix: $A_{erw} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
    - Forme die Matrix A_{erw} mit Hilfe von **Gauss** so lange um, bis sich ergibt: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{bmatrix}$
    - Die inverse Matrix lautet dann: $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
- **Aufgabe Nr. 2**: Gegeben sei die Matrix $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$
    - **a)** Bestimme zu dieser Matrix den Kern sowie das Bild der linearen Abbildung.
    - **b)** Bestimme die inverse Matrix A_2^{-1} mit $A_2 \cdot A_2^{-1} = E$ (Lösung)
