Einführung in die Matrizenrechnung

Überblick

Einführung: Diagonalmatrizen

Hinweis: Die Beispiele wurden mit dem CAS-Programm Maxima berechnet.

- Zwei "Diagonalmatrizen" **D1** und **D2**

```
D1: diagmatrix(3,4.0);
```

```
[ 4.0   0    0  ]
[               ]
[  0   4.0   0  ]
[               ]
[  0    0   4.0 ]
```

```
D2: diagmatrix(3,7.0);
```

```
[ 7.0   0    0  ]
[               ]
[  0   7.0   0  ]
[               ]
[  0    0   7.0 ]
```

- Die Matrizenmultiplikation in Maxima: `D1 . D2;`
- Ergebnis:

```
[ 28.0  0.0   0.0  ]
[                  ]
[ 0.0   28.0  0.0  ]
[                  ]
[ 0.0   0.0   28.0 ]
```

- Das Invertieren einer Matrix: **D3** = **D1**$^{-1}$

```
D3 : invert(D1);
```

```
[ 0.25   0     0   ]
[                  ]
[  0    0.25   0   ]
[                  ]
[  0     0    0.25 ]
```

```
invert(D2);
```

```
[ 0.14285714285714         0                  0         ]
[                                                       ]
[        0         0.14285714285714           0         ]
[                                                       ]
[        0                 0          0.14285714285714  ]
```

- Der Test:

```
D3 . D1 = E
```

```
[ 1.0  0.0  0.0 ]
[               ]
[ 0.0  1.0  0.0 ]
[               ]
[ 0.0  0.0  1.0 ]
```

Aufgabe zum Viehhandel in China (mit Matrizen)

- Eine Matrix A1 zur Aufgabe "Viehhandel in China"

  ```
  A1: matrix([2.0,5.0,-13.0],[3.0,-9.0,3.0],[-5.0,6.0,8.0]);
  ```

  ```
  [  2.0    5.0   - 13.0 ]
  [                      ]
  [  3.0   - 9.0   3.0   ]
  [                      ]
  [ - 5.0   6.0    8.0   ]
  ```

- Die invertierte Matrix **A2** = $\mathbf{A1^{-1}}$

  ```
  A2 : invert(A1);
  ```

  ```
  [ 3.75   4.916666666666666  4.25  ]
  [                                 ]
  [ 1.625  2.041666666666667  1.875 ]
  [                                 ]
  [ 1.125  1.541666666666667  1.375 ]
  ```

- Die rechte Seite v1 des LGS:

  ```
  v1: matrix([1000.0],[0.0],[-600.0]);
  ```

  ```
  [ 1000.0  ]
  [         ]
  [   0.0   ]
  ```

```
[          ]
[ - 600.0 ]
```

- . . . und der Lösungsvektor:

  ```
  A2 . v1;
  ```

```
[ 1200.0 ]
[        ]
[ 500.0  ]
[        ]
[ 300.0  ]
```

"Besondere" Matrizen

- Neben der **Nullmatrix N**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ist vor allem die **Einheitsmatrix E** wichtig:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Diagonalmatrizen** erhalten wir durch Multiplikation einer Zahl $c \in \Re$ mit der Einheitsmatrix: **c * E** = **D**

Im Beispiel oben: `D1 = 4 * E` bzw. `D2 = 7 * E`

- **Aufgabe 1:** Begründe, weshalb das Problem "Inverse einer Matrix finden" bei Diagonalmatrizen so einfach ist.

Bezeichnungsweise für Matrizen

- Matrizen sind erst mal nur ein **Zahlenschema**:

```
[ a11   a12   a13 ]
[                 ]
[ a21   a22   a23 ]
[                 ]
[ a31   a32   a33 ]
```

Dabei gilt:

zuerst **Z**eile, **s**päter **S**palte

also bezeichnet a_{31} die Zahl in der 3. Zeile und der ersten Spalte:

```
[ |     a12   a13 ]
[ |               ]
[ |     a22   a23 ]
[ |               ]
[-|------------   ]
```

- Bis jetzt sind uns nur "einfache" Matrizen begegnet, da alle Matrizen **quadratisch** waren: man nennt eine Matrix A **quadratisch**, wenn sie genau so viele Zeilen wie Spalten hat. Das muss nicht sein:

```
[ 1.0   2.0   3.0 ]
[                 ]
[ 4.0   5.0   6.0 ]
```

eine **2 x 3**-Matrix (klar?). So basteln wir uns auch **Vektoren**: das sind einfach **3 x 1**-Matrizen (**3D**) bzw. **2 x 1**-Matrizen (**2D**)

```
[ 1.0 ]
[     ]                 [ 1.0 ]
[ 2.0 ]      bzw.       [     ]
[     ]                 [ 7.0 ]
[ 3.0 ]
```

Rechnen mit Matrizen

- Wir können Matrizen "vervielfachen" durch Multiplikation mit einer Zahl $c \in \Re$: **c ∗ A** Dabei wird **jedes** Element a_{ij} (i für die Zeile, j für die Spalte) der Matrix A mit der Zahl c multipliziert: c ∗ A =

$$\begin{bmatrix} c*a11 & c*a12 & c*a13 \\ c*a21 & c*a22 & c*a23 \\ c*a31 & c*a32 & c*a33 \end{bmatrix}$$

- Wir können zwei Matrizen A und B **addieren**, falls sie **genau** die gleiche Anzahl an Zeilen und Spalten haben:

$$A = \begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b11 & b12 \\ b21 & b22 \end{bmatrix}$$

Die Matrix C berechnet sich dann komponentenweise: $c_{12} = a_{12} + b_{12}$

$$C = \begin{bmatrix} c11 & c12 \\ c21 & c22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a11+b11 & a12+b12 \\ a21+b21 & a22+b22 \end{bmatrix}$$

- **Aufgabe 2:** Berechne die Summe der beiden Matrizen

$$M = \begin{bmatrix} 1.0 & 2.0 \\ 4.0 & 5.0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 4.0 & 1.0 \\ 0.5 & -2.0 \end{bmatrix}$$

- Und dann gibt es da noch die **Multiplikation**: Damit wir eine Matrix M mit einer Matrix N multiplizieren können, **muss die Anzahl der Spalten von M mit der Anzahl der Zeilen von N übereinstimmen**, Beispiel: M * N =

$$\begin{bmatrix} 5.0 & -3.0 \\ 18.5 & -6.0 \end{bmatrix}$$

Im Beispiel:

```
5.0 = 1.0 * 4.0 + 2.0 * 0.5 = 4 + 1
```

oder:

```
-6.0 = 4.0 * 1.0 + 5.0 * (-2.0) = 4 - 10
```

also nach dem Schema:

```
M =   [ -------- ]
      [          ]
      [ 4.0  5.0 ]
```

```
N =   [ |    1.0 ]
      [ |        ]
      [ |  - 2.0 ]
```

wenn wir $c_{11} = 5.0$ berechnen. Das Element c_{11} steht am Kreuzungspunkt zwischen der ersten Zeile von M und der ersten Spalte von N. Dann gilt:

$$\mathbf{c_{11} = m_{11} \cdot n_{11} + m_{12} \cdot n_{21}}$$

d. h. in der Matrix **M** gehen wir in der ersten **Zeile** entlang, in der Matrix **N** dagegen in der ersten **Spalte**. Das klingt nicht nur kompliziert, es **ist** kompliziert!

Aufgaben

- **Aufgabe 3:** Berechne das Produkt der beiden Matrizen N und M: N * M, und zeige: **M * N ≠ N * M** (→ Schlußfolgerung?)
- **Aufgabe 4:**
  - a) Berechne das Produkt von M mit sich selbst: M * M = M^2
  - b) Berechne das Produkt von N mit sich selbst: N * N = N^2
- **Aufgabe 5:** Sinnvoll ist sicher im Cornelsen auf S. 207 die Übung 2, sowie S. 209, Nr. 8.

→ sp, Stand: 2017-01-31
