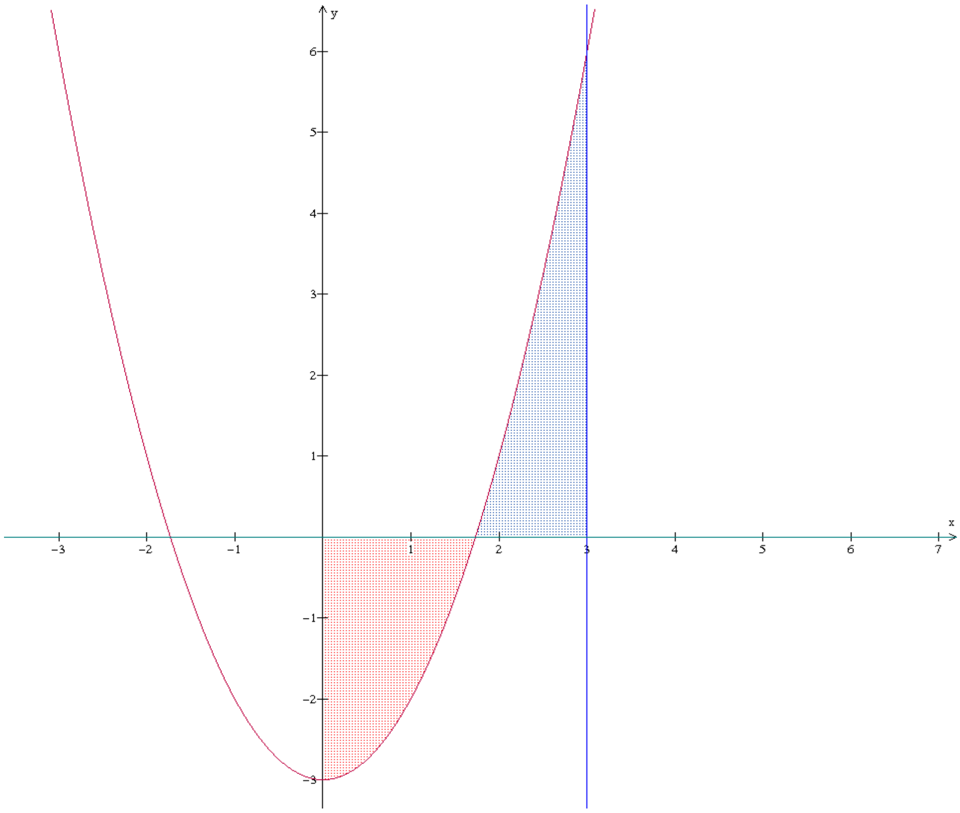
Flächen unterhalb der x-Achse/Orientierter Flächeninhalt

Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2 - 3$ auf dem Intervall $I = [0;3]$



Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion f (Schreibweise $\mathbf{G_f}$) und der x-Achse im Intervall $I = [0;3]$

Wir setzen an: $J_0(x)=\int_0^x t^2-3\ dt=\frac{x^3}{3}-3x$

Uns interessiert der Wert der Integralfunktion für x = 3:

$$J_0(3) = 0$$

wie ihr durch Einsetzen von $x = 3$ in den Term der Integralfunktion leicht überprüfen könnt. Komisch. Wir bestimmen den Flächeninhalt bis zur Nullstelle von f(x):

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$ d. h. also im Intervall $I=[0;\sqrt{3}]$

$$J_0(\sqrt{3})=\int_0^{\sqrt{3}} t^2-3\ dt=\frac{(\sqrt{3})^3}{3}-3\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$$

Wir vermuten:

$$J_{\sqrt{3}}(3)=2\sqrt{3}$$

Dann gilt:

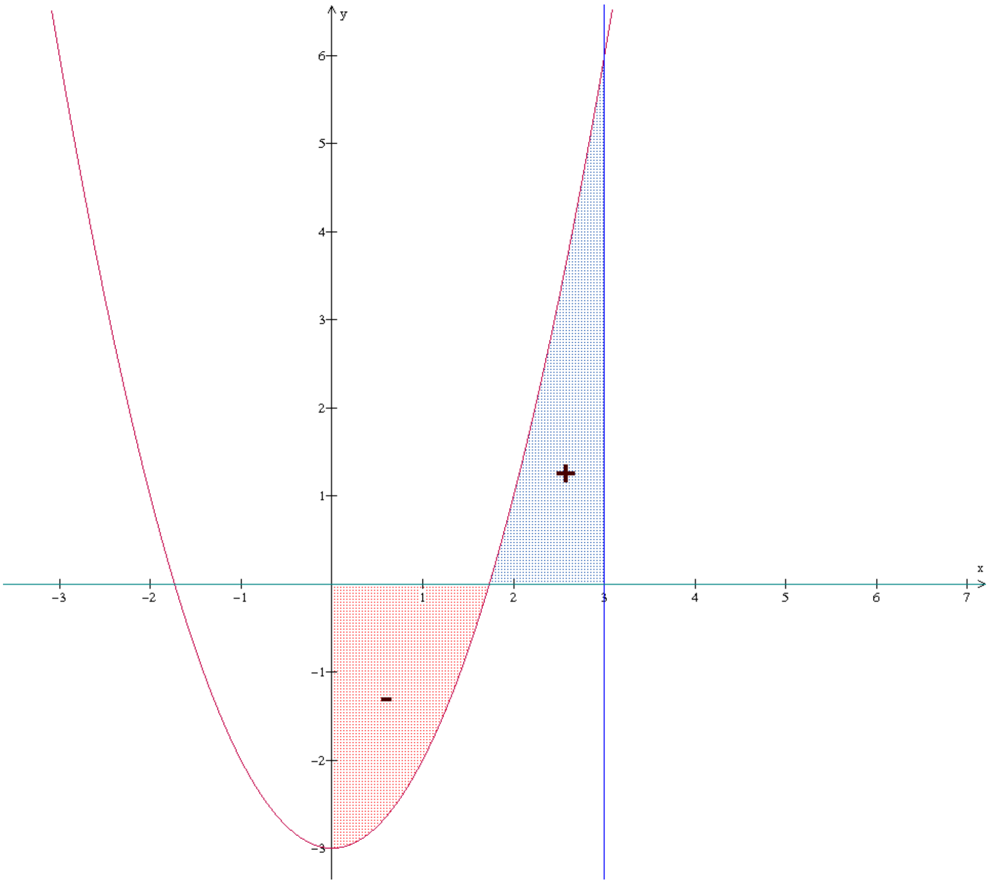
$$J_0(\sqrt{3})+J_{\sqrt{3}}(3)=-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=0$$

Wie bestimme ich $J_{\sqrt{3}}(3)$?

So: $J_{\sqrt{3}}(3) = J_0(3) - J_0(\sqrt{3}) = 0 - (-2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

Wir halten fest: Gilt im Intervall `I=[a;b]` „irgendwo" `f(x) < 0`, so müssen wir den sogenannten **orientierten Flächeninhalt** nehmen:

(1) Wir zerlegen das Intervall anhand der **Nullstellen** in **Teilintervalle**, in denen entweder `f(x) ≥ 0` oder `f(x) < 0`, im Bild:



(2) Wir bestimmen für jedes Teilintervall den orientierten Flächeninhalt
- `f(x) > 0`: dann können wir „normal" rechnen
  $J_{\sqrt{3}}(3)=2\sqrt{3}$
- `f(x) < 0`: dann nehmen den **Betrag** des Integrals:
  $$J_0(\sqrt{3})=|\int_0^{\sqrt{3}} t^2-3\ dt|=|\frac{(\sqrt{3})^3}{3}-3\mathrm{sqrt}3|=|-2\sqrt{3}|=2\sqrt{3}$$

(3) Der **gesamte Flächeninhalt** ergibt sich dann einfach als **Summe der orientierten Flächeninhalte**

Aufgaben
Berechne jeweils den Flächeninhalt zwischen G_f (Graph der Funktion) und der x-Achse im Intervall $I = [a;b]$

1. $f(x) = -0.5\ x^2$; $I = [0;4]$ **(= L/S, S. 141, Nr. 3a)**
2. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$; $I = [0;2]$ **(= L/S, S. 141, Nr. 3e)**
3. $f(x) = \cos(x)$; $I = [0;2]$ **(= L/S, S. 141, Nr. 5f)**
4. $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$; $I = [-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ **(= Aufgabe vom 07.09.2010)**
5. $f_k(x) = 3x - kx^2$; Bestimme k so, dass der Graph G_{f_k} von f_k mit der x-Achse den Flächeninhalt $A=18$ **FE** hat

Tipp für alle Aufgaben: **Skizze**

Lösungen an walter [dot] spiegel [at] web [dot] de, ab Mittwoch 15.09.10 im WWW:
http://wswiki.wspiegel.de → **Mathematik** → **12 (unter „Jahrgangsstufen")**

URL für den Funktionenplotter **Graph** (Freeware): http://www.padowan.dk/graph

Download: http://www.padowan.dk/graph/Download.php

Kurze (!) Anleitung: http://www.wspiegel.de/upl/graph_einf.pdf

Fragen

- Mail an **walter [dot] spiegel [at] web [dot] de**
- Es gibt auch ein **Kontaktformular:** http://www.wspiegel.de/cgi-bin/kontakt2.php **(maximal 100 Zeichen → SMS !)**

In den **Betreff** bitte: **"Mathe Q1" (ohne "!)**

Link zum Thema:

- http://www.mathe.timmermann.org/integralrechnung.htm
  Kapitel 2.4 (Sie müssen sich nicht einloggen)

Im Buch (Lambacher/Schweizer):

- **S. 140/141**

Sie finden dieses Dokument im Internet unter der Adresse

http://www.wspiegel.de/upl/orientierter_flaecheninhalt.pdf

Vorteil: Dann müssen Sie nicht die Links „eintippen"