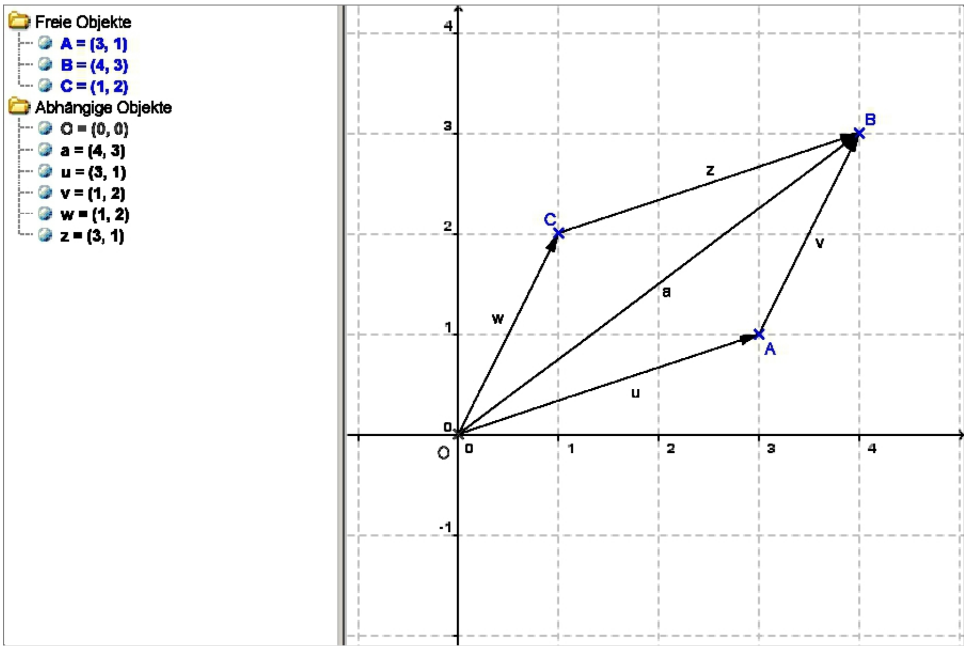
Vektoren

- → **Mathematik Q2**

Kräfteparallelogramm



Download — Erstellt mit © GeoGebra durch wspiegel

- → **Hinweis**: Die Geogebra-Datei kann man über Download herunterladen.
- → **Noch ein Hinweis**: Das Geogebra-Bild wird nicht richtig angezeigt → Im Bild auf die **rechte Maus-Taste** → **Zoom**

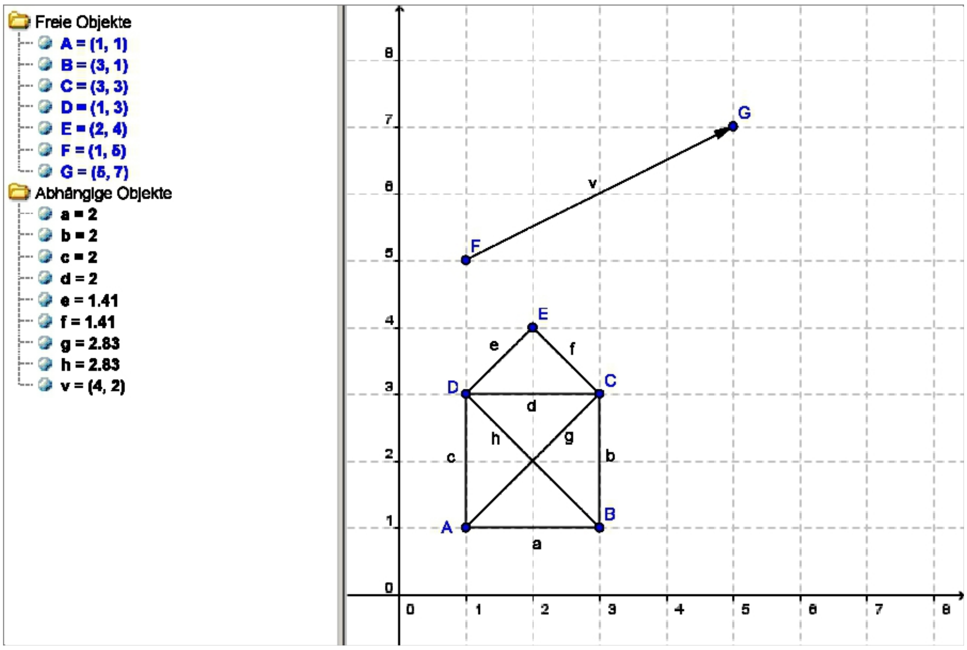
- Das Kräfteparallelogramm beantwortet folgende Frage: Wir ziehen von O aus mit einer bestimmten Kraft in Richtung A. Und jemand anders zieht auch von O aus in Richtung C. Wo „landen" wir bei der „Überlagerung" der beiden Kräfte? Antwort: an der Stelle B.

- Im Kräfteparallelogramm kommen wir vom Ursprung **O** aus zum Punkt **B**, indem wir erst von **O** aus nach **A** „gehen", und dann von **A** aus nach **B**. Es gibt aber noch einen zweiten Weg: von **O** aus über **C** nach **B**.

- **Aufgabe 1:** Welche mathematische Eigenschaft entspricht diesen beiden Wegen?
  - Antwort: Dem entspricht die Vertauschung von Verschiebungen → Kommutativgesetz für die Addition von Vektoren.

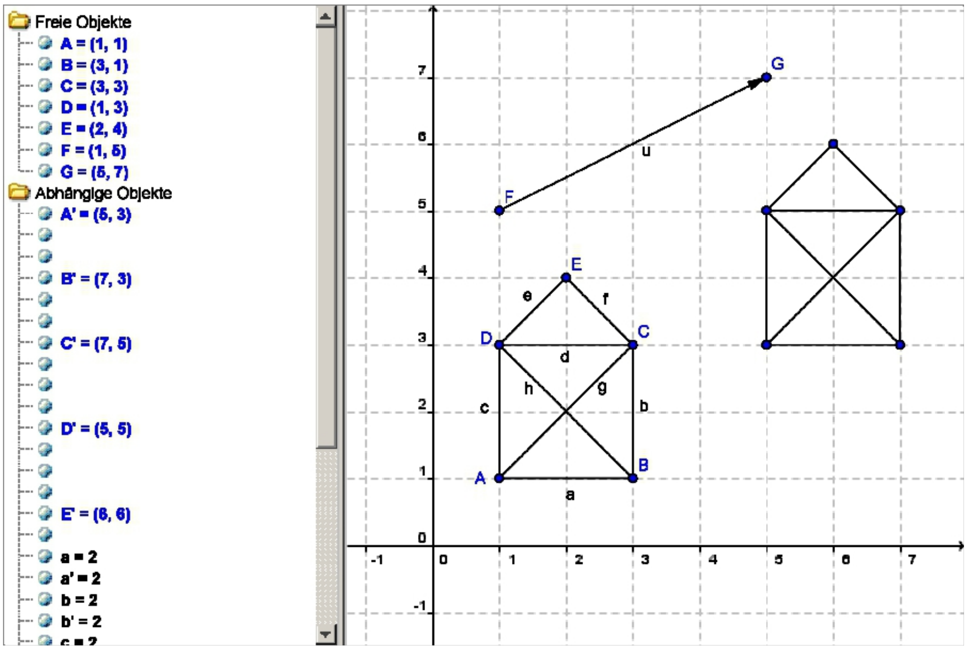
Verschiebungen

- In der Physik sorgen Kräfte, die an einem Punkt angreifen, für eine **Verschiebung**: Dem Betrag der Kraft entspricht dabei die Länge des Vektors. Ein Vektor $\vec{v}$ ist also eine **Verschiebung**. Beispiel: Das ist das Haus des Nikolaus.



Download — Erstellt mit © GeoGebra durch wspiegel

- Eingezeichnet ist auch die Verschiebung **v = (4,2)**. Das schreiben wir: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
  - **Achtung**: Geogebra bezeichnet eine Verschiebung (=Vektor) mit **v = (4,2)**. Das steht **nicht** für „4,2", sondern für eine Verscheibung von 4 Einheiten in horizontaler Richtung („x-Achse") und 2 Einheiten in vertikaler Richtung („y-Achse").
- Die Wirkung der Verschiebung auf das Haus des Nikolaus:



Download — Erstellt mit © GeoGebra durch wspiegel

- Geogebra und die Arbeit mit Matrizen zeigen uns, wie wir mit Vektoren „rechnen" können: Im Kräfteparallelogramm können wir beispielsweise die Verschiebung **u = (3,1)** zusammensetzen aus einer Verschiebung in horzontaler Richtung **(3,0)**, und einer Verschiebung in vertikaler Richtung **(0,1)**. Dann gilt: **u = (3,1) = (3,0) + (0,1)**, unsere **Matrizenaddition**: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- In der Matrizen-Einführung haben wir Matrizen mit einer Zahl $c \in \Re$ multipliziert. Was bedeutet das in der Vektorsprache? Durch die Multiplikation mit einer Zahl können wir einen Vektor verlängern (oder stauchen). Dann können wir aber vereinfachen: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Die beiden Vektoren $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind unsere „einfachsten" Vektoren. Das gilt gleich in mehrfacher Hinsicht:
  - Sie zeigen genau in Richtung der Koordinatenachsen.

  - Sie haben die **Länge 1**, man spricht deshalb auch von **Einheitsvektoren**.
- Die beiden Vektoren $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ können wir uns als „Atome" vorstellen, aus denen wir die übrigen Vektoren (=Verschiebungen) durch **Addition** und **Multiplikation mit einer Zahl c** erhalten. Man nennt diese beiden Vektoren auch eine **Basis** des $\Re^2$. Zurück zum Kräfteparallelogramm:
- **Aufgabe 2:** Berechne die Länge der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{a}$.

Schreibweise für die **Länge** oder den **Betrag des Vektors** $\vec{a}$: $|\vec{a}|$

- **Aufgabe 3:** Beschreibe das Verfahren zur Berechnung der Länge eines Vektors.
  - Antwort

Pfeile

- Vektoren werden auch als **Pfeile** bezeichnet, genauer: als (Repräsentant einer) **Pfeilklasse**. Zu einer Pfeilklasse gehören alle Vektoren
  - gleicher Länge und
  - gleicher Richtung

- **Drei Probleme**
  - **(1)** Wann sind zwei Vektor **gleich?**
    - Das ist einfach: Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie gleiche Länge und gleiche Richtung haben. Sie sind dann zueinander pararlell: $\vec{u} \| \vec{z}$ oder $\vec{v} \| \vec{w}$ (im Kräfteparallelogramm)
  - **(2)** Gibt es eine Verschiebung, die einen Punkt auf sich selbst abbildet?
    - **Ja**, das ist der sog. **Nullvektor** $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
    - **Aufgabe 4**: Bestimme Länge und Richtung des **Nullvektors** $\vec{n}$.
  - **(3)** Wie kann ich eine Verschiebung rückgängig machen?
    - Das ist die Frage nach einer **inversen** Verschiebung: wir erreichen das offensichtlich, indem wir den Pfeil **umkehren**, d. h. der Vektor hat zwar die gleiche Länge, zeigt aber genau in die umgekehrte Richtung. Schreibweise:

$$\boxed{(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}}$$

    - Beispiel: $-\vec{u} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Punkte und Ortsvektoren

- Wir haben Punkte im Koordinatensystem, z. B. den Punkt **B(4|3)** (im Kräfteparallelogramm). Und wir haben Vektoren. Welche Beziehung besteht zwischen den Punkten und den Vektoren?

- Wenn wir im Kräfteparalleolgramm den Nullpunkt **O(0|0)** zum Punkt **B(4|3)** verschieben, dann bedeutet das in der Sprache der Vektoren die Verschiebung $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_1 - 0 \\ b_2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 0 \\ 3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Den Vektor $\overrightarrow{OB}$ nennt man auch einen **Ortsvektor**, und schreibt kurz, aber mißverständlich $\vec{B}$.

- Beispiel „Haus des Nikolaus": Gegeben sind die Punkte **F(1|5)** und **G(5|7)**, wie sieht der Vektor $\overrightarrow{FG}$ aus?
  - Antwort: $\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} g_1 - f_1 \\ g_2 - f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 7 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
    Das ist aber der Vektor $\vec{v}$, den wir oben für die Verschiebung angegeben haben.
