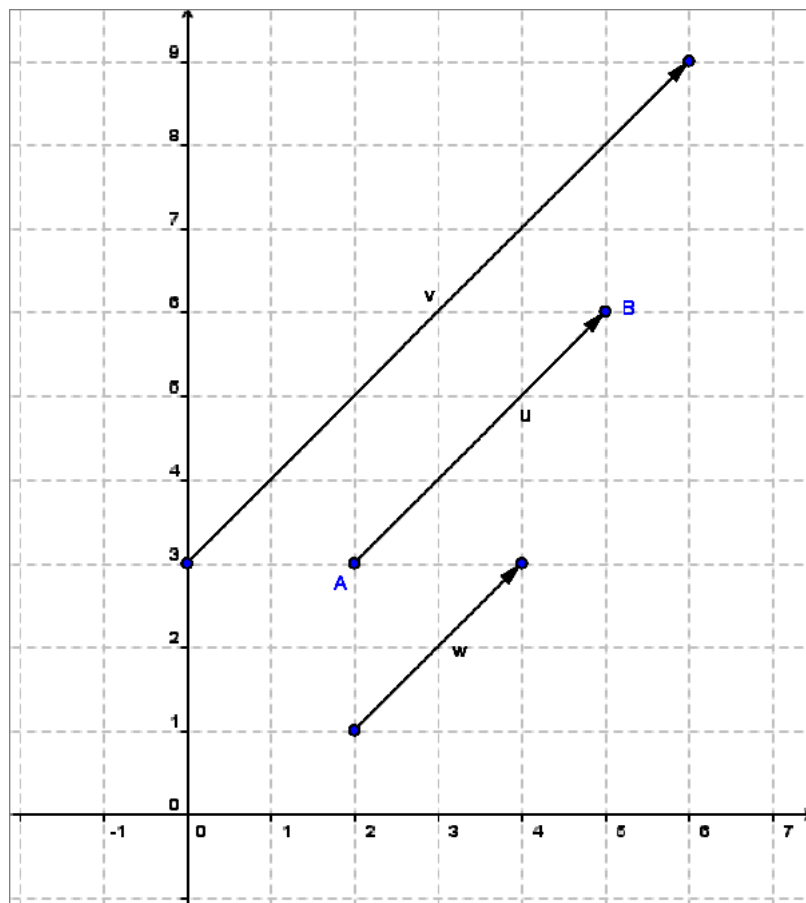


Vektorketten

▪ → Mathematik Q2

Die Multiplikation mit einer Zahl

Statt „Multiplikation mit einer Zahl“ sagt man auch: **skalare Multiplikation**. Beispiel:



Download — Erstellt mit © GeoGebra durch wspiegel

Wir erreichen durch die skalare Multiplikation mit der Zahl $r \in \mathbb{R}$ eine **Streckung** bzw. **Stauchung** des Vektors \vec{u} , Schreibweise:

$$r \cdot \vec{u}$$

Die skalare Multiplikation mit der Zahl $r \in \mathbb{R}$ wird komponentenweise durchgeführt:

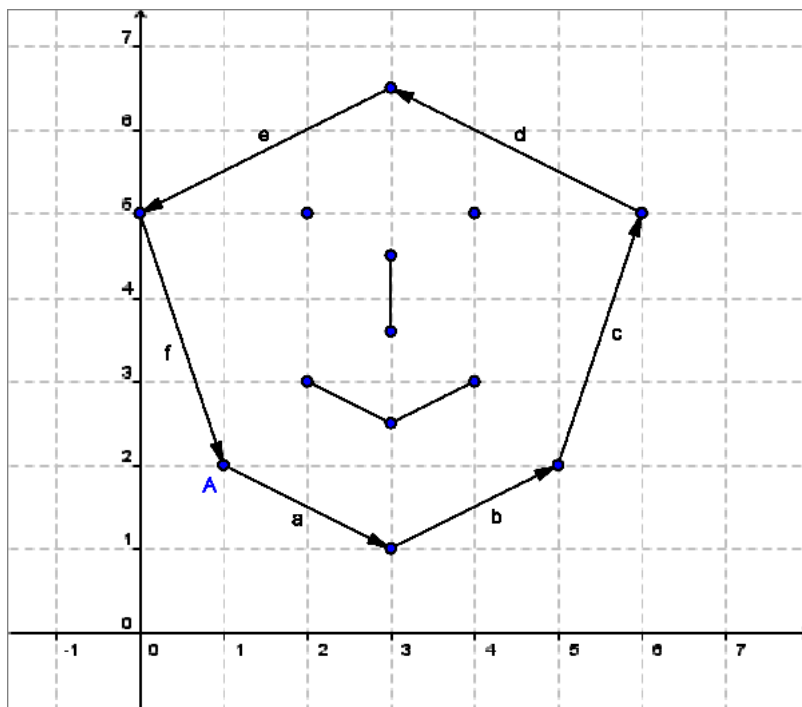
$$r \cdot \vec{u} = r \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot u_1 \\ r \cdot u_2 \\ r \cdot u_3 \end{pmatrix}$$

Im Beispiel: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = 2 \cdot \vec{u}$, und $\vec{w} = \frac{2}{3} \cdot \vec{u}$.

So weit, so gut. Interessant wird die skalare Multiplikation erst in Zusammenhang mit der Vektoraddition. Dadurch erhalten wir → Geraden. Oder **Vektorketten**.

Vektorketten

Beispiel:



Download — Erstellt mit © GeoGebra durch wspiegel

In diesem Beispiel gilt: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f}$ und wir nennen diese Vektorkette **geschlossen**, da Anfangspunkt und Endpunkt übereinstimmen. Dann haben wir den Punkt A aber überhaupt nicht verschoben, und das entspricht der Verschiebung $\vec{0}$, also dem **Nullvektor**. Wir können also bei einer geschlossenen Vektorkette schreiben:

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f} = \vec{0}$$

Und wo bleibt die skalare Multiplikation? Nun, Vektor \vec{a} und Vektor \vec{d} haben in unserem Beispiel etwas gemeinsam: \vec{d} zeigt ja in die entgegengesetzte Richtung und ist nur etwas länger: $\vec{d} = -1.5 \cdot \vec{a}$

Und genauso gilt für \vec{b} und \vec{e} : $\vec{e} = -1.5 \cdot \vec{b}$

Dann können wir aber vereinfachen: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 1.5 \cdot \vec{a} - 1.5 \cdot \vec{b} + \vec{f} = \vec{0}$

Oder: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{f} = -1.5 \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

- **Aufgabe 1:** Schreibe alle (!) Vektoren in Koordinatenform (Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$), und überprüfe diese Rechnung!

Statt von **Vektorketten** spricht man übrigens auch von **Linearkombinationen**: In einer **Linearkombination** von Vektoren werden Vektoren **addiert** bzw. **skalar multipliziert**. Beispiel: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - 1.5 \cdot \vec{a} - 1.5 \cdot \vec{b} + \vec{f}$

Kommt bei der Linearkombination „zufällig“ der Nullvektor $\vec{0}$ heraus, so sagt man: die Vektoren sind **linear abhängig**.

Beispiel: $1.5 \cdot \vec{a} + 1.5 \cdot \vec{b} + \vec{d} + \vec{e} = \vec{0}$

Das gilt allgemein: Können wir einen Vektor \vec{w} als Linearkombination der Vektoren \vec{u} und \vec{v} schreiben,

dann ist der Vektor \vec{w} von den Vektoren \vec{u} und \vec{v} linear abhängig: $\vec{w} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ mit $r \neq 0 \neq s$.

- In der Ebene (**2D**) entspricht der linearen Abhängigkeit einfach die Gleichung: $\vec{w} = r \cdot \vec{u}$ mit $r \neq 0$. Man nennt die beiden Vektoren dann **kollinear**, anschaulich: die beiden Vektoren sind parallel.
 - Im Raum (**3D**) erhalten wir die Gleichung: $\vec{w} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ mit $r \neq 0 \neq s$. Man nennt die drei Vektoren dann **komplanar**, anschaulich bedeutet das: die drei Vektoren liegen in einer Ebene.
-

Üben

Wichtig sind die **Beispiele 2** und **3** im LS auf **S. 52**.

- Einfache Rechenübungen finden sich auf **S. 53: Nr. 10** bis **Nr. 13**. Man löst die Aufgaben wie in Beispiel 2 auf S. 52, indem man die Vektorgleichung als Koordinatengleichungen schreibt. Ergebnis ist ein **LGS**, das wir mit Hilfe von Herrn Gauss lösen können. Hilfreich ist da sicher der Rechner zum Lösen linearer Gleichungssysteme von Arndt Brünner: **<http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/gleichungssysteme.htm>**, alternativ: Unser **TR!**
 - Wichtig sind noch die Aufgaben mit geometrischem Bezug im LS auf S. 54: beginnend bei **Nr. 14** und bis **Nr. 22**. Wir werden diese Aufgaben später aufgreifen bei dem schönen Thema **Beweise mithilfe von Vektoren**.
-

Mathematik Q2