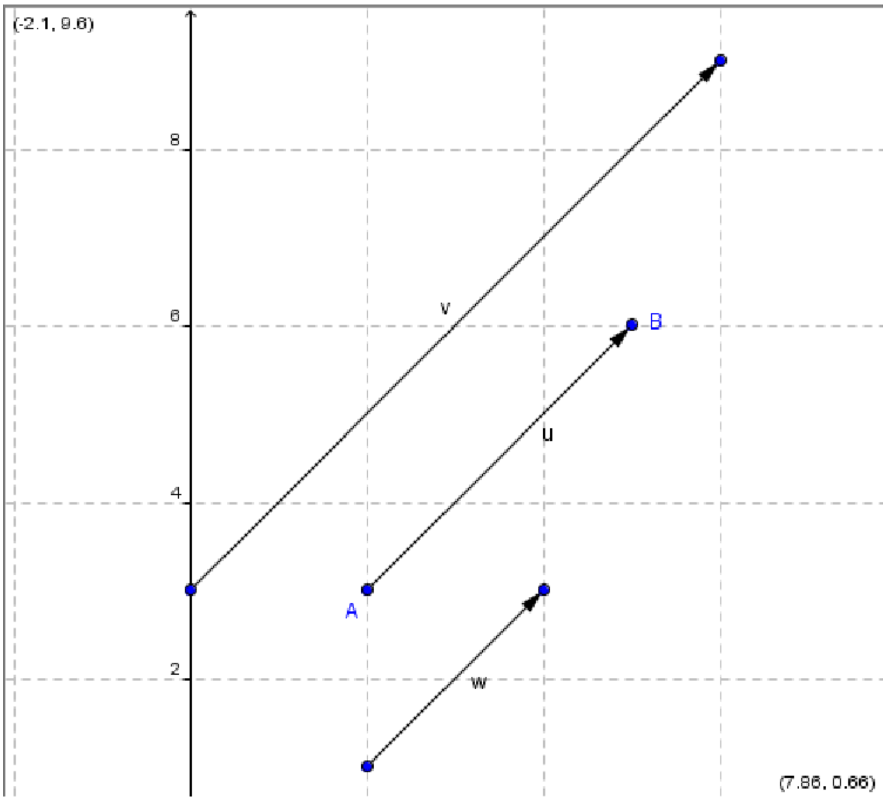
Vektorketten

- → **Mathematik Q2**

Die Multiplikation mit einer Zahl

Statt „Multiplikation mit einer Zahl" sagt man auch: **skalare Multiplikation**. Beispiel:



Download — Erstellt mit © GeoGebra durch wspiegel

Wir erreichen durch die skalare Multiplikation mit der Zahl r ∊ ℜ eine **Streckung** bzw. **Stauchung** des Vektors $\vec{u}$, Schreibweise:

$$r \cdot \vec{u}$$

Die skalare Multiplikation mit der Zahl r ∊ ℜ wird komponentenweise durchgeführt:

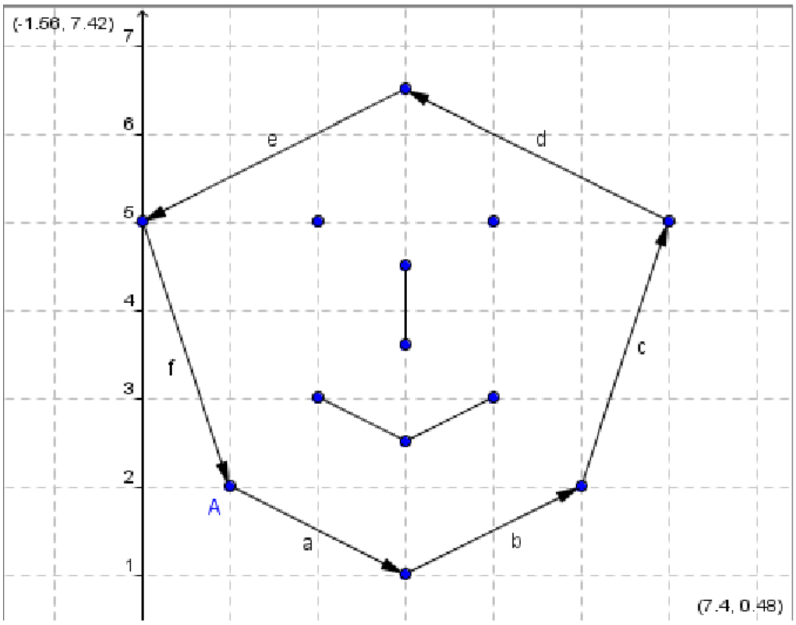
$$r \cdot \vec{u} = r \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot u_1 \\ r \cdot u_2 \\ r \cdot u_3 \end{pmatrix}$$

Im Beispiel: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = 2 \cdot \vec{u}$, und $\vec{w} = \frac{2}{3} \cdot \vec{u}$.

So weit, so gut. Interessant wird die skalare Multiplikation erst in Zusammenhang mit der Vektoraddition. Dadurch erhalten wir → Geraden. Oder **Vektorketten**.

Vektorketten

Beispiel:



Download — Erstellt mit © GeoGebra durch wspiegel

In diesem Beispiel gilt: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}$, und wir nennen diese Vektorkette **geschlossen**, da Anfangspunkt und Endpunkt übereinstimmen. Dann haben wir den Punkt A aber überhaupt nicht verschoben, und das entspricht der Verschiebung $\vec{0}$, also dem **Nullvektor**. Wir können also bei einer geschlossenen Vektorkette schreiben:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}+\vec{f}=\vec{0}$$

Und wo bleibt die skalare Multiplikation? Nun, Vektor $\vec{a}$ und Vektor $\vec{d}$ haben in unserem Beispiel etwas gemeinsam: $\vec{d}$ zeigt ja in die entgegengesetzte Richtung und ist nur etwas länger: $\vec{d}=-1.5\cdot\vec{a}$

Und genauso gilt für $\vec{b}$ und $\vec{e}$: $\vec{e}=-1.5\cdot\vec{b}$

Dann können wir aber vereinfachen: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-1.5\cdot\vec{a}-1.5\cdot\vec{b}+\vec{f}=\vec{0}$

Oder: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{f}=-1.5\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

- **Aufgabe 1:** Schreibe alle (!) Vektoren in Koordinatenform (Beispiel: $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$), und überprüfe diese Rechnung!

Statt von **Vektorketten** spricht man übrigens auch von **Linearkombinationen**: In einer **Linearkombination** von Vektoren werden Vektoren **addiert** bzw. **skalar multipliziert**. Beispiel: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-1.5\cdot\vec{a}-1.5\cdot\vec{b}+\vec{f}$

Kommt bei der Linearkombination „zufällig" der Nullvektor $\vec{0}$ heraus, so sagt man: die Vektoren sind **linear abhängig**.
Beispiel: $1.5\cdot\vec{a}+1.5\cdot\vec{b}+\vec{d}+\vec{e}=\vec{0}$

Das gilt allgemein: Können wir einen Vektor $\vec{w}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ schreiben, dann ist der Vektor $\vec{w}$ von den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig: $\vec{w}=r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}$ mit r≠0≠s.

- In der Ebene (**2D**) entspricht der linearen Abhängigkeit einfach die Gleichung: $\vec{w}=r\cdot\vec{u}$ mit r≠0. Man nennt die beiden Vektoren dann **kollinear**, anschaulich: die beiden Vektoren sind parallel.
- Im Raum (**3D**) erhalten wir die Gleichung: $\vec{w}=r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v}$ mit r≠0≠s. Man nennt die drei Vektoren dann **komplanar**, anschaulich bedeutet das: die drei Vektoren liegen in einer Ebene.

Üben

Wichtig sind die **Beispiele** im *Cornelsen* auf **S. 45 - 46**. Auf S. 46 finden sich auch drei sinnvolle Übungen zum Thema.

Auch die Überprüfung, ob Vektoren **kollinear** bzw. **komplanar** sind, muss man üben: vgl. hierzu die Übung 18 auf S. 48 bzw. die Übungen 20 und 21 auf S. 49 im *Cornelsen*.

- Relevant sind noch die Aufgaben mit *geometrischem Bezug* wie beispielsweise auf S. 54 im *Lambacher-Schweizer*: beginnend bei **Nr. 14** und bis **Nr. 22**. Wir werden diese Aufgaben später aufgreifen bei dem schönen Thema **Beweise mithilfe von Vektoren**.

Mathematik Q2