Vektorraum

- → **Mathematik Q2**

Was ist ein Vektorraum?

Fangen wir mit der einfachen Frage an:

Was ist ein Vektor?

Mögliche Antworten:

- Wir verstehen unter einem Vektor eine Verschiebung.
- Wir haben einen Vektor auch als 3x1-Matrix aufgefasst.
- **Ein Vektor ist einfach ein Element eines Vektorraumes.**

Die letzte Antwort klären wir jetzt. In der Mathematik definiert man einen Vektorraum wie folgt:

- **Def.: Vektorraum V**
  - Sei V ein Vektorraum, dann gibt es in V eine Verknüpfung **+** für je zwei Elemente a, b ∈ V, so dass das Ergebnis der Verknüpfung **a + b** wieder in V liegt, kurz: a + b ∈ V. Diese Verknüpfung hat folgende Eigenschaften:
    - **a + b = b + a** (Kommutativität)
    - **a + (b + c) = (a + b) + c** mit c ∈ V (Assozativität)
    - Es gibt in V ein sog. **neutrales Element 0** bezüglich der Operation +, so dass für alle a ∈ V gilt:
      a + 0 = a
    - Es gibt in V zu jedem a ∈ V ein **inverses Element -a**, so dass gilt:
      a + (- a) = a - a = 0
  - Für die Elemente a, b ∈ V ist eine **skalare Multiplikation** (kurz: **S-Multiplikation**) mit reellen Zahlen erklärt, Schreibweise: **α • a** mit $\alpha \in \mathbf{R}$ und $\alpha \cdot a \in V$. Das Ergebnis der skalaren Multiplikation führt also wieder zu einem Element von V. Für diese **S-Multiplikation** fordern wir:
    - **(α + β) • a = α•a + β•a** (Distributivität für Zahlen)
    - **α•(a + b) = α•a + α•b** (Distributivität für Vektoren)
    - **(αβ) • a = α•(β•a)** (Assozativität für Zahlen)
    - Wir fordern für die S-Multiplikation auch ein **neutrales Element 1** bzgl. der **S-Multiplikation**
      1 • a = a mit $1 \in \mathbf{R}$

Hinweise zu dieser Definition:

- Die Definition ist ziemlich abstrakt . . .
- Im ersten Teil der Definition erklären wir, wie wir mit den Elementen aus V „rechnen". Kurz: Wir erklären auf den Elementen aus V eine **Addition**. Mathematisch erfüllen diese vier Forderungen die Eigenschaften einer sog. **Abelschen Gruppe** (auch: **kommutative Gruppe**). ← **Das** muss man sich nicht merken :-)
- Im zweiten Teil der Definition werden die Elemente von V mit den reellen Zahlen verknüpft,

und zwar durch eine **Multiplikation von links**; als Ergebnis kommt dabei wieder ein Vektor aus V heraus. Vereinfacht ausgedrückt regeln wir hier die *Verträglichkeit* zwischen den Vektoren aus V und den reellen Zahlen.

Jetzt kommen die . . .

Beispiele

- **Vektorraum $\mathbf{R}^3$**
  - Die Definition des Vektorraums passt natürlich genau zu unseren **3D**-Vektoren.
- **Vektorraum $\mathbf{R}^n$**
  - Was wir mit 3 reellen Zahlen (= 3-Tupeln) gemacht haben, geht natürlich auch mit n reellen Zahlen: $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{pmatrix}$
    Addition und **S-Multiplikation** können wir genauso wie den **Nullvektor** und das **inverse Element** übertragen, nur das wir jetzt eben n Einträge haben. Aber das Zeichnen wird jetzt etwas mühsamer . . .
- **Vektorraum der linearen Funktionen**
  - Die Funktionen *f* bzw. *g* haben die Form: $f(x) = m_1 \cdot x + b_1$ bzw. $g(x) = m_2 \cdot x + b_2$
    Die Addition definieren wir komponentenweise: $f + g = (m_1 + m_2) \cdot x + (b_1 + b_2)$
    und analog funktioniert das mit der S-Multiplikation:
    $r \cdot f(x) = r \cdot (m_1 \cdot x + b_1) = (r \cdot m_1) \cdot x + (r \cdot b_1)$
    Der Nullvektor ist jetzt die konstante Funktion $0 = 0 \cdot x + 0$
    und das inverse Element zu f erklären wir so: $-f(x) = -(m_1 \cdot x + b_1) = -m_1 \cdot x - b_1$
    Aufgabe 1: Es sei $f(x) = 3 \cdot x + 7$, $g(x) = -2 \cdot x + 5$, $r = 4$, bestimme $f + g$, $r \cdot f$, $f + (-f)$ sowie $g + 0$
- **Vektorraum der Polynome vom Grad 3**
  - Die Elemente unseres Vektorraumes sind jetzt Polynome der Form:
    $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit $a_i \in \mathbf{R}$
    Mit etwas Matrizenrechnung können wir auch schreiben: $\begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{pmatrix}$
    Die Addition funktioniert jetzt **zeilenweise**:
    $\begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 + b_3 & a_2 + b_2 & a_1 + b_1 & a_0 + b_0 \end{pmatrix}$
    Die S-Multiplikation erklären wir folgendermaßen:
    $r \cdot \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_3 & r \cdot a_2 & r \cdot a_1 & r \cdot a_0 \end{pmatrix}$
    Der Nullvektor wird besonders einfach: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, und der zu $\begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$ inverse Vektor ist dann $\begin{pmatrix} -a_3 & -a_2 & -a_1 & -a_0 \end{pmatrix}$
    Beachte: Ein Polynom ergibt sich erst dann, wenn wir die Matrizenmultiplikation durchgeführt haben!
    Vgl. zu diesem Beispiel auch **Beispiel 1** im LS auf S. 56.
    Aufgabe 2: Führe die Matrizenmultiplikation mit dem Nullvektor $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ durch.
    Und: Vergleiche jeweils ein Polynom, das mit dem Vektor $\begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$ sowie mit dem inversen Vektor $\begin{pmatrix} -a_3 & -a_2 & -a_1 & -a_0 \end{pmatrix}$ berechnet wurde.

- **Vektorraum der 4×4-Matrizen**
  - Vgl. hierzu Aufgabe 4 auf S. 56 im LS sowie unsere Einführung in die Matrizenrechnung **ohne** die Matrizenmultiplikation (Warum?).

Üben

Empfehlenswert sind die Beispiele 1 bis 3 im LS auf S. 56.

- Zentral sind folgende Aufgaben aus dem LS: Nr. 4 auf S. 56, sowie Nr. 5 und Nr. 6 auf S. 57.
- Auch bei Vektorräumen gibt es etwas zu beweisen: Probiere Nr. 11 oder Nr. 12 im LS auf S. 57.
- Vergleiche die Definition oben mit der Definition im LS auf S. 55.
